

Стереометрия

Борис Трушин

Всем привет! В этом файле вы найдете около двадцати задач по стереометрии из реальных вариантов ЕГЭ прошлых лет.

К каждой задаче есть ответ и подробный видеоразбор, которые доступны по ссылкам под условием.

Если вам покажется, что этого набора задач недостаточно, то посмотрите [соответствующий плейлист](#) на моём YouTube-канале, или приобретите мой [мини-курс по стереометрии](#).

Кроме того, сейчас в онлайн-школе Фоксфорд идёт мой [курс по подготовке к ЕГЭ](#).

Перед вами версия файла от 11 марта 2024 года. Актуальную версию всегда можно найти по ссылке trushinbv.ru/book_stereo.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 1. (ЕГЭ-2024. Демоверсия)

В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $BD = CD$.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB .

Ответ [Решение](#)

Задача 2. (ЕГЭ-2023. Основная волна)

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AC = BC$. Точки Q и M – середины рёбер B_1C_1 и BC соответственно. На ребре AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

Ответ [Решение](#)

Задача 3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

а) Плоскость α пересекает ребро DS в точке L . Докажите, что

$$BN : NC = DL : LS.$$

б) Пусть $BN : NC = 1 : 2$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость α разбивает пирамиду.

Ответ [Решение](#)

Задача 4. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ отмечена точка M – середина ребра SA , и точка N на ребре SB , так что $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость MNC параллельна прямой SD .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNC , если все рёбра пирамиды равны 6.

Ответ [Решение](#)

Задача 5. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, длины оснований которой $BC = 3$ и $AD = 8$. На ребре SD отмечена точка M так, что $SM : MD = 3 : 2$, на ребре BC отмечена N так, что $BN : NC = 1 : 2$. Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

а) Докажите, что $SK : KC = 6 : 1$.

б) Найдите отношение объёмов фигур, на которые плоскость AMN разбивает пирамиду.

Ответ [Решение](#)

Задача 6. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, BC – меньшее основание, O – точка пересечения диагоналей, а MN – средняя линия трапеции $ABCD$. Через точки M и N провели плоскость α параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечением пирамиды плоскостью α является трапеция.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если прямая SO перпендикулярна AD , $SO = 9$, $AD = 12$, $BC = 10$.

Ответ [Решение](#)

Задача 7. (ЕГЭ-2021. Основная волна)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 10, а высота – 12. Точка K – середина ребра SD . Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P .

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ равна $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD .

б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.

Ответ Решение

Задача 8. (ЕГЭ-2020. Основная волна)

На ребрах SB и AB правильной треугольной пирамиде $SABC$ отметили соответственно точки K и M так, что $SK : KB = 5 : 6$ и $AM : MB = 7 : 2$. Ребрами пирамиды $AB = 9$, $SC = \sqrt{43}$.

а) Докажите, что плоскости CKM и ABC перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $CBMK$.

Ответ Решение

Задача 9. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)

В прямом круговом конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA , N – точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB .

а) Докажите, что угол ANO прямой.

б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно, что $AB = 10$.

Ответ Решение

Задача 10. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)

В треугольной пирамиде $SABC$ $SB = SC = AC = AB = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что прямые BC и SA перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BC и SA .

Ответ Решение

Задача 11. (ЕГЭ-2019. Основная волна)

S_{ABC} – правильная треугольная пирамида, сторона основания AB равно 4, а боковое ребро SA равно 3. На ребрах AB и SC взяты точки K и M соответственно так, что $BK : KA = CM : MS = 2 : 1$. Плоскость α параллельна прямой SA и содержит прямую KM .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 2$, считая от вершины A .

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

Ответ Решение

Задача 12. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1 .

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

Ответ Решение

Задача 13. (ЕГЭ-2018. Основная волна)

На окружности одного из оснований кругового прямого цилиндра отмечены точки A и B , а на окружности другого основания точки B_1 и C_1 . При этом BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол C_1BA прямой.

б) Найдите расстояние от точки B до AC_1 , если $AB = 12$, $BB_1 = 4$ и $B_1C_1 = 3$.

Ответ Решение

Задача 14. (ЕГЭ-2018. Основная волна)

Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC . Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

Ответ Решение

Задача 15. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Ответ Решение

Задача 16. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP .

Ответ Решение

Задача 17. (ЕГЭ-2016. Основная волна)

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L середины ребер $A_1 C_1$ и $B_1 C_1$ соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая MB перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Ответ Решение

Задача 18. (ЕГЭ-2016. Основная волна)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины ребер CD и AB , соответственно, а NT – высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

а) Докажите, что точка T является серединой SM .

б) Найдите расстояние между NT и SC .

Ответ Решение

Ответы

1. б) $3\sqrt{6}$. 2. б) $\frac{16}{25}$. 3. б) $\frac{13}{5}$. 4. б) $\frac{15\sqrt{19}}{4}$. 5. б) $\frac{239}{146}$. 6. б) $\frac{99}{2}$.
7. б) 150. 8. б) $\frac{36\sqrt{3}}{11}$. 9. б) 45° . 10. б) $\sqrt{7}$. 11. б) $\frac{2\sqrt{11}}{9}$.
12. б) $\sqrt{\frac{6}{5}}$. 13. б) $\frac{60}{13}$. 14. б) $8\sqrt{6}$. 15. б) $\arccos \frac{3}{\sqrt{34}} = \arctg \frac{5}{3}$.
16. б) $\sqrt{11}$. 17. б) $\frac{3}{4}$. 18. б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.