Математический анализ. Лекция X

Замечательные пределы

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

2 октября 2013 г.

Определение

Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$. В случае $a = e$ она обозначается $\ln x = \log_e x$.

Определение

Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$. В случае $a = e$ она обозначается $\ln x = \log_e x$.

Теорема

Логарифмическая функция

$$\log_a x:\ (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

строго монотонна и непрерывна на $(0, +\infty)$, а область ее значений – $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$. Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a^{\alpha \cdot \log_\alpha x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a^{\alpha \cdot \log_\alpha x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}.$$

3°. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$. В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.
1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a^{\alpha \cdot \log_\alpha x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}.$$

3°. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a = a^1.$$

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^{\alpha} : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^\alpha : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^\alpha : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^\alpha : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.
При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда она становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

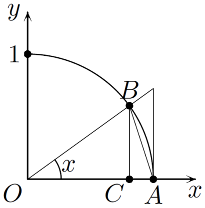
Лемма

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ |\sin x| \leqslant |x|.$$

Лемма

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ |\sin x| \leqslant |x|.$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим часть тригонометрического круга, лежащую в первом квадранте.

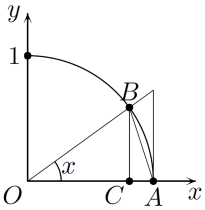


Пусть радианная мера угла $\angle AOB$ равна x. Тогда длина дуги AB равна x, а $\sin x = BC$.

Лемма

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ |\sin x| \leqslant |x|.$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим часть тригонометрического круга, лежащую в первом квадранте.



Пусть радианная мера угла $\angle AOB$ равна x. Тогда длина дуги AB равна x, а $\sin x = BC$. Из школьного курса геометрии известно, что

$$\sin x = BC < BA < x.$$

Этим нужная оценка установлена при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В силу четности обеих частей неравенства она верна и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Остается заметить, что при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$ эта оценка очевидна.

Этим нужная оценка установлена при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. В силу четности обеих частей неравенства она верна и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Остается заметить, что при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$ эта оценка очевидна.

Теорема

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на областях их определения.

Этим нужная оценка установлена при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В силу четности обеих частей нераввенства она верна и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Остается заметить, что при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$ эта оценка очевидна.

Теорема

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на областях их определения.

Доказательство. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Этим нужная оценка установлена при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. В силу четности обеих частей нераввенства она верна и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Остается заметить, что при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$ эта оценка очевидна.

Теорема

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на областях их определения.

Доказательство. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

В силу предыдущей леммы

$$|\Delta y| \leqslant 2 \left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|,$$

так что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность функции $\sin x$ в точке x_0.

Непрерывность функции $\cos x$ можно доказать аналогично или воспользоваться равенством $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Непрерывность функции $\cos x$ можно доказать аналогично или воспользоваться равенством $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.
Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где знаменатели отличны от нуля, как частные непрерывных функций.

Символами

$$\arcsin x: \ [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos x: \ [-1;1] \to [0;\pi],$$

$$\operatorname{arctg} x: \ (-\infty;\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arcctg} x: \ (-\infty;\infty) \to (0;\pi)$$

обозначаются функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, к сужению $\cos x$ на $[0,\pi]$, к сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, к сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0,\pi)$ соответственно.

Символами

$$\arcsin x: \ [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos x: \ [-1;1] \to [0;\pi],$$

$$\operatorname{arctg} x: \ (-\infty;\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arcctg} x: \ (-\infty;\infty) \to (0;\pi)$$

обозначаются функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, к сужению $\cos x$ на $[0,\pi]$, к сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, к сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0,\pi)$ соответственно.

Теорема

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны на областях их определений.

Символами

$$\arcsin x: \ [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos x: \ [-1;1] \to [0;\pi],$$

$$\operatorname{arctg} x: \ (-\infty;\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arcctg} x: \ (-\infty;\infty) \to (0;\pi)$$

обозначаются функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, к сужению $\cos x$ на $[0,\pi]$, к сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, к сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0,\pi)$ соответственно.

Теорема

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны на областях их определений.

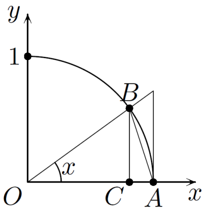
Доказательство следует из теоремы об обратной функции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом радианной меры x, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом и сравнивая их площади, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$



откуда

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Из четности функций $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ следует, что те же неравенства верны и при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to 0$ и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$, доказываем требуемое утверждение.

Из четности функций $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ следует, что те же неравенства верны и при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to 0$ и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$, доказываем требуемое утверждение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Из четности функций $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ следует, что те же неравенства верны и при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to 0$ и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$, доказываем требуемое утверждение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Из непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Рассмотрим функцию $f(y)=\dfrac{y}{\sin y}$ при $0<|y|<\pi$. Пусть $y=\arcsin x$, тогда

$$f(\arcsin x)=\frac{\arcsin x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Рассмотрим функцию $f(y) = \dfrac{y}{\sin y}$ при $0 < |y| < \pi$. Пусть $y = \arcsin x$, тогда

$$f(\arcsin x) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность функции $\arcsin x$ в точке $x = 0$ и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Рассмотрим функцию $f(y) = \dfrac{y}{\sin y}$ при $0 < |y| < \pi$. Пусть $y = \arcsin x$, тогда

$$f(\arcsin x) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность функции $\arcsin x$ в точке $x = 0$ и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Рассмотрим функцию $f(y)=\dfrac{y}{\sin y}$ при $0<|y|<\pi$. Пусть $y=\arcsin x$, тогда

$$f(\arcsin x)=\frac{\arcsin x}{x}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность функции $\arcsin x$ в точке $x=0$ и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

Представив $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в виде $\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}$ при $y=\operatorname{arctg} x$, повторяем рассуждения из предыдущего доказательства.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$.

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_x+1} < x \leqslant \dfrac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$.

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_x+1} < x \leqslant \dfrac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Правая часть неравенства является монотонной функцией аргумента x. Поэтому

$$\exists \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$.

Пусть $0<x<1$, $n_x\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_x+1} < x \leqslant \dfrac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Правая часть неравенства является монотонной функцией аргумента x. Поэтому

$$\exists \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Аналогично показывается, что левая часть двойного неравенства также стремится к e.

Переходя к пределу в этих неравенствах, получаем $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Покажем, что

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Покажем, что
$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$
Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y = -x$, $z = \dfrac{y}{1-y} = \dfrac{-x}{1+x} > 0$, имеем
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Покажем, что

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y = -x$, $z = \dfrac{y}{1-y} = \dfrac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}\Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad -1 < x < 0,$$

то есть функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлена в виде суперпозиции $(f\circ\varphi)(x)$ двух функций, где

$$f:\ (0,+\infty)\to\mathbb{R}, \quad \varphi:\ (-1,0)\to(0,+\infty),$$

причем $\lim\limits_{x\to 0-0}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{z\to 0+0} f(z) = e$.

Покажем, что
$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y = -x$, $z = \dfrac{y}{1-y} = \dfrac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}\Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad -1 < x < 0,$$

то есть функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлена в виде суперпозиции $(f\circ\varphi)(x)$ двух функций, где

$$f:\ (0,+\infty)\to\mathbb{R}, \quad \varphi:\ (-1,0)\to(0,+\infty),$$

причем $\lim\limits_{x\to 0-0}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{z\to 0+0} f(z) = e$.

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Теорема доказана.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Это частный случай предыдущего примера.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Это частный случай предыдущего примера.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

Представив $\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Это частный случай предыдущего примера.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

Пусть $y=a^x-1$. Тогда $x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, $\dfrac{a^x-1}{x}=\left.\dfrac{y\ln a}{\ln(1+y)}\right|_{y=a^x-1}$. Остается воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Это частный случай предыдущего примера.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Это частный случай предыдущего примера.

Из рассмотренных примеров следует, что при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Это частный случай предыдущего примера.

Из рассмотренных примеров следует, что при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Упражнение

Доказите, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$