МАТЕМАТИКА

БОРИС ТРУШИН

От автора

Всем привет! С вами снова Борис Трушин)

Я уже больше шести лет веду youtube-канал youtube.com/trushinbv по околошкольной математике и знаю, что многие учителя и школьники используют его контент в качестве дополнительного (а иногда и основного) теоретического материала. Однако, на ютубе не очень удобная навигация, и сложно понять по каким темам уже есть ролики. Поэтому для удобства я сделал эту брошюрку. В ней собраны все основные темы школьной математики, а возле каждой темы есть кликабельная ссылка на разбор соответствующей темы (содержание тоже кликабельно).

Кроме того, в брошюре есть сборник заданий ЕГЭ. Все задачи содержат ссылки на ответы и подробные видеоразборы.

Брошюра будет обновляться и пополняться. Актуальные версию можно найти по ссылке trushinbv.ru/book. Вы смотрите версию 3.0 от 26.07.2023.

Интересного вам «чтения»))

Содержание

§1. Теория **6**

1.1. Математика. 5–7 класс 6

1.2. Алгебра. 8–9 класс 6

1.3. Теория вероятностей. 8–9 класс 8

1.4. Планиметрия. 8–9 класс 8

1.5. Тригонометрия. 10–11 класс 10

1.6. Стереометрия. 10–11 класс 11

1.7. Неравенства. 10–11 класс 11

1.8. Начала математического анализа. 10–11 класс 12

1.9. Теория чисел 14

1.10. Классические неравенства 15

1.11. HARD Комплексные числа 15

§2. Задачи из ЕГЭ **16**

2.1. Задание 1 16

2.2. Задание 2 17

2.3. Задание 3 18

2.4. Задание 4 19

2.5. Задание 5 20

2.6. Задание 6 21

2.7. Задание 7 23

2.8. Задание 8 24

2.9. Задание 9 26
2.10. Задание 10 28
2.11. Задание 11 29
2.12. Задание 12 30
2.13. Задание 13 34
2.14. Задание 14 36
2.15. Задание 15 39
2.16. Задание 16 43
2.17. Задание 17 48
2.18. Задание 18 61

§3. Задачник **69**

3.1. Алгебраические задачи 69
3.2. Планиметрия 69
3.3. Логарифмы 70
3.4. Комбинаторика 70
3.5. Теория чисел 71
3.6. Математический анализ 72

§4. Красивые задачи **73**

4.1. Зацикленный поезд 73
4.2. Задача про монетку 73
4.3. Тысячеугольник 73
4.4. Плотное множество на окружности 74

4.5. Лев против дрессировщика 74

§5. Ответы **75**

§1. Теория

1.1. Математика. 5–7 класс

1.1.1. Почему минус на минус даёт плюс?

Почему в результате произведения отрицательных чисел получается положительно число.

1.1.2. Можно ли делить на ноль?

1.1.3. Рациональные числа

1.1.4. Проценты

1.1.5. Как научиться считать без калькулятора

1.1.6. Как решать уравнения и неравенства

Как решать уравнения и неравенства не руководствуясь шаблонами «перенесем слева направо, поменяв знак», «перемножим крест-накрест», «домножим на (-1) неравенство, поменяв его знак», а действительно понимать, почему можно делать эти действия.

1.1.7. Средняя скорость

1.1.8. Задачи на совместную работу

1.2. Алгебра. 8–9 класс

1.2.1. Геометрические доказательства иррациональности $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$

О наглядной иррациональности

1.2.2. Как решать уравнения и неравенства

Как решать уравнения и неравенства не руководствуясь шаблонами «перенесем слева направо, поменяв знак», «перемножим крест-накрест», «домножим на (-1) неравенство, поменяв его знак», а действительно понимать, почему можно делать эти действия.

1.2.3. Квадратный трёхчлен. Формула для корней и теорема Виета

Вывод формулы для корней квадратного уравнения и доказательство теорема Виета

1.2.4. Квадратный трёхчлен. Формула четного коэффициента

1.2.5. Парабола

Построение графика квадратичной функции

1.2.6. Квадратный трёхчлен. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Биквадратные и возвратные уравнения

1.2.7. Квадратный трёхчлен. Квадратные неравенства

Как решать квадратные неравенства

1.2.8. Метод интервалов

Рациональные уравнения и неравенства

1.2.9. Средняя скорость

1.2.10. Задачи на совместную работу

1.2.11. Признаки делимости на 9 и на 11

1.2.12. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1.2.13. Бином Ньютона

Про факториал, перестановки, игру в слова, бином Ньютона и биномиальные коэффициенты

1.2.14. Треугольник Паскаля

Про числа сочетаний, треугольник Паскаля и бином Ньютона

1.2.15. HARD Сумма n-ых степеней

Как найти сумму $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$

1.3. Теория вероятностей. 8–9 класс

1.3.1. Как научиться решать задачи на вероятность

1.3.2. Как научиться решать задачи на вероятность. Часть 2

1.3.3. HARD Отличие достоверности и 100% вероятности

О том, что 100% вероятность не всегда гарантия того, что событие произойдет.

1.4. Планиметрия. 8–9 класс

1.4.1. Как прокачать геометрию

1.4.2. Свойства и признаки равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике равны медианы/высоты/биссектрисы, исходящие из равных углов.
Если в треугольнике равны две медианы/высоты, то этот треугольник является равнобедренным.

1.4.3. HARD Теорема Штейнера — Лемуса

Если в треугольнике равны две биссектрисы, то этот треугольник является равнобедренным.

1.4.4. Замечательные точки треугольника
Четыре замечательные точки треугольника: точка пересечения медиан; точка пересечения биссектрис; точка пересечения высот; точка пересечения серединных перпендикуляров

1.4.5. Прямоугольный треугольник
Все, что нужно знать про прямоугольный треугольник

1.4.6. Теоремы синусов и косинусов

1.4.7. Формула Герона

1.4.8. Формула Герона. Геометрическое доказательство

1.4.9. Теорема про тангенсы
Если сумма трёх углов равна 180 градусов, то сумма их тангенсов равна произведению их тангенсов

1.4.10. Теорема о биссектрисе угла треугольника

1.4.11. Длины биссектрисы, медианы и высоты треугольника

1.4.12. Теорема Менелая

1.4.13. Теорема Вариньона
Четырёхугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон произвольного четырёхугольника, является параллелограммом, стороны которого параллельны диагоналям исходного четырёхугольника.

1.4.14. Связь между сторонами и диагоналями параллелограмма
Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон

1.4.15. Убежать от трапеции
Как задачу про трапецию свести к задаче про треугольник или параллелограмм

1.4.16. Биссектрисы трапеции

1.4.17. Окружность
Все, что нужно знать про окружность

1.4.18. Вписанные и центральные углы
Вписанный угол в два раза меньше соответствующего центрального; вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны; угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на хорду.

1.4.19. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник

1.4.20. Две касающиеся окружности
Соотношения между радиусами и отрезками касательных у двух окружностей, касающихся внешним образом

1.4.21. HARD Теорема Дезарга

1.4.22. HARD Теорема Брианшона
Если шестиугольник описан около окружности, то три диагонали, соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, проходят через одну точку

1.5. Тригонометрия. 10–11 класс

1.5.1. Тригонометрические формулы
Вся тригонометрия с нуля до уравнений

1.5.2. Геометрическая иллюстрация тригонометрических формул
Как увидеть естественность формул синуса/косинуса суммы/разности

1.5.3. Арк-функции. Простейшие тригонометрические уравнения

1.5.4. Тригонометрические уравнения

Как решать тригонометрические уравнения

1.5.5. Введение вспомогательного угла

1.6. Стереометрия. 10–11 класс

1.6.1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости

1.6.2. Теорема о трёх перпендикулярах

Прямая, проведённая в плоскости перпендикулярна некоторой наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость

1.6.3. Принцип Кавальери

Как найти объем параллелепипеда, призмы, цилиндра, тетраэдра, пирамиды, конуса и шара

1.6.4. Как решать задачи по стереометрии

Расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми, расстояние между перпендикулярными прямыми, угол между плоскостями и площадь сечения

1.7. Неравенства. 10–11 класс

1.7.1. Квадратный трёхчлен. Квадратные неравенства

Как решать квадратные неравенства

1.7.2. Метод интервалов

Рациональные уравнения и неравенства

1.7.3. ОДЗ
Что называется областью допустимых значений переменной в неравенствах

1.7.4. Метод рационализации

1.8. Начала математического анализа. 10–11 класс

1.8.1. Бесконечные десятичные дроби. Что такое $0{,}(9)$
Правда ли, что $0{,}(9) = 1$?

1.8.2. Степень с действительным показателем
О том, что такое возведение в иррациональную степень

1.8.3. Степень с действительным показателем 2.0

1.8.4. Логарифм
Показательная функция, график показательной функции, логарифмическая функция, график логарифмической функции

1.8.5. Все свойства логарифмов

1.8.6. Как оценить логарифм

1.8.7. Числа e, π и другие иррациональности

1.8.8. Число e
Откуда взялись свойства числа e

1.8.9. HARD Иррациональность числа π

1.8.10. HARD Что такое $x^{x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}}$?
Бесконечная лесенка из степеней

1.8.11. HARD Про счетные множества и континуум

Целых, рациональных и даже алгебраических чисел (нулей многочленов с целыми коэффициентами) счётное количество, то есть их «столько же», сколько и натуральных. Действительных же чисел больше, – их континуум. Но можно ли «пощупать» этот континуум?

1.8.12. Асимптота

1.8.13. Производная

1.8.14. Касательная

Что такое касательная, геометрический смысл производной, уравнение касательной

1.8.15. Производная произведения и частного

1.8.16. Производная сложной функции и производная обратной функции

Производная сложной функции; производная обратной функции; производная показательной и логарифмической функций; производная арк-функций

1.8.17. HARD Экстремум

Про то, как может выглядеть график функции в окрестности точек минимума и максимума

1.8.18. HARD Экстремум 2.0

Про то, как может выглядеть график функции в окрестности точек минимума и максимума

1.8.19. Интеграл

Что такое первообразная и определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

1.8.20. HARD Вид уравнений кривых, после поворота на некоторый угол

Как записать уравнение параболы и гиперболы, повернутых на некоторый угол.

1.8.21. HARD Эллипс, парабола и гипербола

Про конические сечения

1.9. Теория чисел

1.9.1. Признаки делимости на 9 и на 11

1.9.2. Малая теорема Ферма

Если p – простое число, а n – целое число, то $n^p - n$ делится на p.

1.9.3. HARD Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число большее единицы можно представить в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.

1.9.4. Нелинейные диофантовы уравнения

Как решать уравнения вида $Am + Bn = Cmn$.

1.9.5. Арифметика остатков. Сравнение по модулю

1.9.6. Признаки делимости. Сравнение по модулю

1.9.7. Задачи на доказательство делимости. Малая теорема Ферма

1.9.8. HARD Малая теорема Ферма и теорема Эйлера

1.9.9. HARD Применение теории чисел в криптографии

О том, на каких идеях стоит современная криптография.

1.10. Классические неравенства

1.10.1. Неравенства. Введение

Про среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее квадратичное, среднее гармоническое, среднее степенное и связь между ними

1.10.2. Неравенство о средних

Неравенство между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим для n чисел:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

1.10.3. Неравенство Коши — Буняковского

1.11. HARD Комплексные числа

1.11.1. Комплексные числа. Введение

1.11.2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра

1.11.3. HARD Формула Кардано

Как решать кубические уравнения

1.11.4. HARD Формула Феррари

Как решать уравнения четвёртой степени

1.11.5. HARD Степень с комплексным показателем

§2. Задачи из ЕГЭ

2.1. Задание 1

Задача 2.1.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 54, вписана окружность, $AB = 18$. Найдите длину стороны CD.
Ответ Решение

Задача 2.1.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите центральный угол AOB, если он на $67°$ больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.
Ответ Решение

Задача 2.1.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
В окружности с центром O: AC и BD – диаметры. Центральный угол AOD равен $122°$. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.
Ответ Решение

Задача 2.1.4. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $61°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
Ответ Решение

Задача 2.1.5. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен $40°$. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.
Ответ Решение

Задача 2.1.6. У треугольника со сторонами 12 и 15 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 10. Найдите длину высоты, проведенной ко второй стороне.
Ответ Решение

Задача 2.1.7. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.
Ответ Решение

2.2. Задание 2

Задача 2.2.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Через среднюю линию основания правильной треугольной призмы, объём которой равен 84, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.
Ответ Решение

Задача 2.2.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.
Ответ Решение

Задача 2.2.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Объём первого цилиндра равен 6 м^3. У второго цилиндра высота в два раза меньше, а радиус основания в три раза больше, чем у первого. Найди объём второго цилиндра (в м^3).
Ответ Решение

Задача 2.2.4. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?
Ответ Решение

Задача 2.2.5. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.
Ответ Решение

Задача 2.2.6. Объём треугольной пирамиды равен 94. Через вершину пирамиды и среднюю линию её основания проведена плоскость. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.
Ответ Решение

Задача 2.2.7. Шар вписан в цилиндр объемом 42. Найдите объем шара.
Ответ Решение

2.3. Задание 3

Мини-курс по теории вероятностей от Бориса Трушина.

Задача 2.3.1. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 9 из Швейцарии, 7 из Чехии, 8 из Словакии и 11 из Австрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Чехии.
Ответ Решение

Задача 2.3.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
На чемпионате по прыжкам к поду выступают 70 спортсменов, среди них 20 прыгунов из Голландии и 36 прыгунов из Колумбии, и 14 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Сербии.
Ответ Решение

Задача 2.3.3. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос по теме «Производная». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Производная».
Ответ Решение

Задача 2.3.4. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Фабрика выпускает сумки. В среднем 4 сумки из 200 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.
Ответ Решение

Задача 2.3.5. (ЕГЭ-2021. Основная волна, резервный день)
В группе туристов 6 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист К., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?
Ответ Решение

Задача 2.3.6. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора Максимова окажется запланированным на последний день конференции?
Ответ Решение

Задача 2.3.7. За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
Ответ Решение

2.4. Задание 4

Мини-курс по теории вероятностей от Бориса Трушина.

Задача 2.4.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Биатлонист четыре раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
Ответ Решение

Задача 2.4.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.
Ответ Решение

Задача 2.4.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.
Ответ Решение

Задача 2.4.4. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 28 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 1 апреля в Волшебной стране будет отличная погода.
Ответ Решение

2.5. Задание 5

Задача 2.5.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Найдите корень уравнения $\log_4(5-x)=2$.
Ответ Решение

Задача 2.5.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите корень уравнения $\sqrt{5x-1}=7$.
Ответ Решение

Задача 2.5.3. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите корень уравнения $2^{4-2x} = 64$.
Ответ Решение

Задача 2.5.4. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \dfrac{1}{125}$.
Ответ Решение

Задача 2.5.5. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-8} = \dfrac{1}{9}$.
Ответ Решение

Задача 2.5.6. Найдите корень уравнения $5x^2 - 26x + 5 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Ответ Решение

Задача 2.5.7. Найдите корень уравнения $(x+1)^3 = -1000$.
Ответ Решение

Задача 2.5.8. Найдите корень уравнения $\log_2(4-x) = 7$.
Ответ Решение

2.6. Задание 6

Задача 2.6.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Найдите значение выражения $\dfrac{4^{2,4} \cdot 7^{3,4}}{28^{1,4}}$.
Ответ Решение

Задача 2.6.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin\dfrac{7\pi}{8}\cos\dfrac{7\pi}{8}$.
Ответ Решение

Задача 2.6.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ\cdot\sin 22^\circ}$.
Ответ Решение

Задача 2.6.4. (ЕГЭ-2021. Досрочная волна)
Найдите значение выражения $16\log_{10}\sqrt[4]{10}$.
Ответ Решение

Задача 2.6.5. Найдите значение выражения $(234^2-266^2):1000$.
Ответ Решение

Задача 2.6.6. Найдите значение выражения $(432^2-568^2):1000$.
Ответ Решение

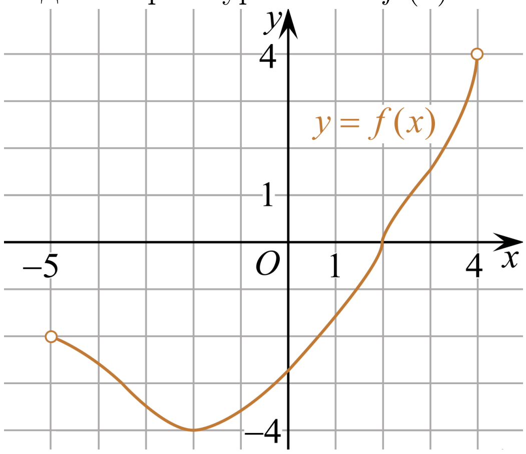
Задача 2.6.7. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x>0$.
Ответ Решение

Задача 2.6.8. Найдите $f(5+x)+f(5-x)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$.
Ответ Решение

Задача 2.6.9. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ\cdot\cos 53^\circ}$.
Ответ Решение

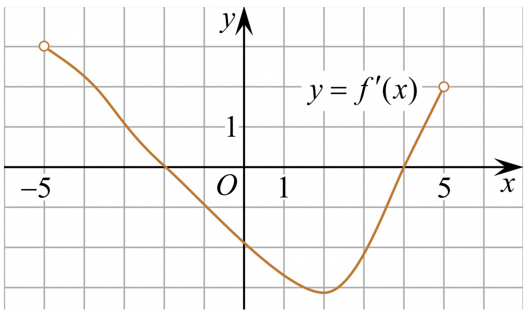
2.7. Задание 7

Задача 2.7.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



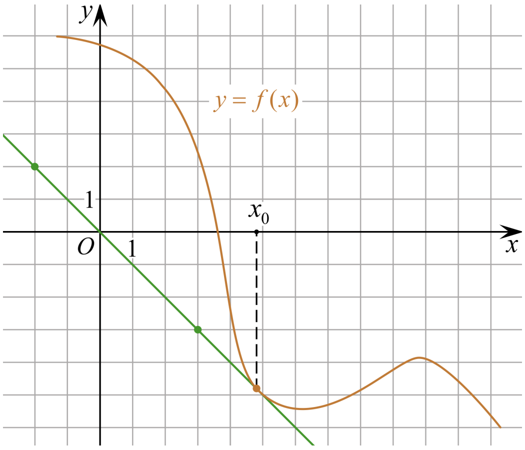
Ответ Решение

Задача 2.7.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



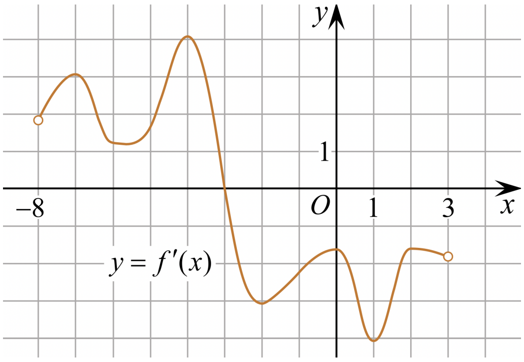
Ответ Решение

Задача 2.7.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Дан график функции $y = f(x)$ и касательная в точке с абсциссой x_0. Найти значение производной функции $f(x)$ в x_0.



Ответ Решение

Задача 2.7.4. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ Решение

2.8. Задание 8

Задача 2.8.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 36$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом

и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ выразите в омах.
Ответ Решение

Задача 2.8.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c\cdot\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 5 м/с. Ответ дайте в МГц.
Ответ Решение

Задача 2.8.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 11{,}5$ – постоянная, $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 34500 Дж.
Ответ Решение

Задача 2.8.4. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2\ell a}$, где ℓ – пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 километра, приобрести скорость 110 км/ч.
Ответ Решение

Задача 2.8.5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах)

от времени работы: $T = T_0 + bt + at^2$, где t – время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16$ К/мин^2, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.
Ответ Решение

2.9. Задание 9

Задача 2.9.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Имеется два сплава. Первый сплав содержит 35% меди, второй – 5% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 80 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.
Ответ Решение

Задача 2.9.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
Имеется два сосуда. Первый содержит 40 кг, а второй – 25 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?
Ответ Решение

Задача 2.9.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Катер в 10:00 вышел по течению реки из пункта A в пункт B, расположенный в 36 км от A. Пробыв 2 часа в пункте B, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 17:00 того же дня. Определите собственную скорость катера (в км/час), если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.
Ответ Решение

Задача 2.9.4. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час – со скоростью 100 км/ч, а затем два часа – со скоростью

75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ Решение

Задача 2.9.5. Расстояние между городами A и B равно 375 км. Город C находится между городами A и B. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

Ответ Решение

Задача 2.9.6. Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, два часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Ответ Решение

Задача 2.9.7. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ Решение

Задача 2.9.8. Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша – за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

Ответ Решение

Задача 2.9.9. Даша и Маша пропалывают грядку за 14 минут, а одна Маша – за 24 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

Ответ Решение

Задача 2.9.10. Первая труба заполняет бассейн за 7 часов, а две трубы вместе – за 5 часов 50 минут. За сколько часов заполняет бассейн одна вторая труба?

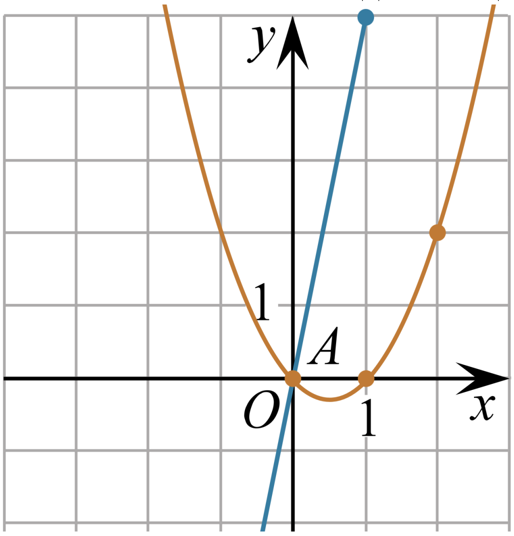
Ответ Решение

Задача 2.9.11. Игорь и Паша красят забор за 20 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь – за 30 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ Решение

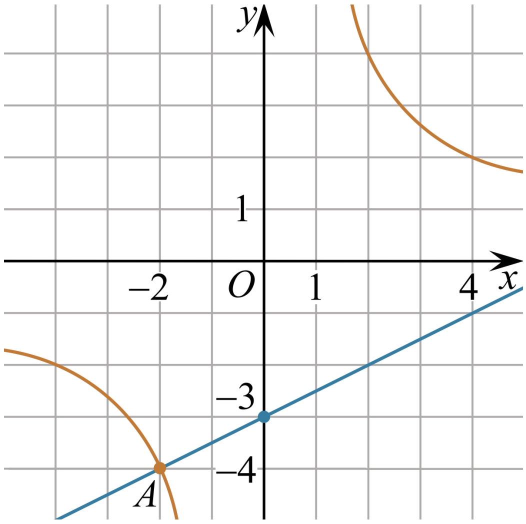
2.10. Задание 10

Задача 2.10.1. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x$ и $g(x) = ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



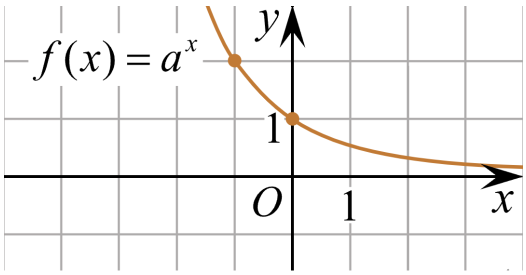
Ответ Решение

Задача 2.10.2. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна)
На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ Решение

Задача 2.10.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ Решение

2.11. Задание 11

Задача 2.11.1. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 19$.
Ответ Решение

Задача 2.11.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$$

на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ Решение

Задача 2.11.3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\cos x - 20x + 7$$

на отрезке $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ Решение

Задача 2.11.4. Найдите точку минимума функции

$$y = 1{,}5x^2 - 27x + 42\ln x - 10.$$

Ответ Решение

2.12. Задание 12

Мини-курс по уравнениям и неравенствам от Бориса Трушина.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 2.12.1. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin(-x) = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Ответ Решение

Задача 2.12.2. (ЕГЭ-2021. Досрочная волна)
а) Решите уравнение $3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.3. (ЕГЭ-2020. Основная волна)
а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{2}\cos x = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.4. (ЕГЭ-2020. Основная волна)
а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.5. (ЕГЭ-2020. Основная волна)
а) Решите уравнение $2\cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.6. (ЕГЭ-2020. Основная волна, резервный день)
а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.7. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
а) Решите уравнение $2\left(\log_2(2\sin x)\right)^2 - 5\log_2(2\sin x) + 2 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.8. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
а) Решите уравнение $\log_7(x+2) = \log_{49} x^4$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \dfrac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.9. (ЕГЭ-2018/2017/2016/2015/2014/2013. Демоверсия)
а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right)$.
Ответ Решение

Задача 2.12.10. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.11. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)
а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{3};\ \sqrt{30}]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.12. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
а) Решите уравнение $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3};\ \sqrt{20}]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.13. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
а) Решите уравнение $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2;\ \log_5 20]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.14. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.15. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
а) Решите уравнение $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 9$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.16. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
а) Решите уравнение $2\left(\log_3(2\cos x)\right)^2 - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.
Ответ Решение

Задачи не из ЕГЭ

Задача 2.12.17. а) Решите уравнение

$$\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.18. а) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.12.19. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}$.
б) Укажите корни на $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.
Ответ Решение

2.13. Задание 13

Мини-курс по стереометрии от Бориса Трушина.

Задача 2.13.1. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
В прямом круговом конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB.
а) Докажите, что угол ANO прямой.
б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно, что $AB = 10$.
Ответ Решение

Задача 2.13.2. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
В треугольной пирамиде $SABC$ $SB = SC = AC = AB = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.
а) Докажите, что прямые BC и SA перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми BC и SA.
Ответ Решение

Задача 2.13.3. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1.
а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.
Ответ Решение

Задача 2.13.4. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
На окружности одного из оснований кругового прямого цилиндра отмечены точки A и B, а на окружности другого основания точки B_1 и C_1. При этом BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол C_1BA прямой.
б) Найдите расстояние от точки B до AC_1, если $AB = 12$, $BB_1 = 4$ и $B_1C_1 = 3$.
Ответ Решение

Задача 2.13.5. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC. Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M.
а) Докажите, что $DM : MD_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.
Ответ Решение

Задача 2.13.6. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.
а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.
Ответ Решение

Задача 2.13.7. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.
а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.
б) Найдите длину отрезка AP.
Ответ Решение

Задача 2.13.8. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB =$

6, а боковое ребро $AA_1 = 3$. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.
а) Докажите, что прямая MB перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.
Ответ Решение

Задача 2.13.9. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины ребер CD и AB, соответственно, а NT – высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.
а) Докажите, что точка T является серединой SM.
б) Найдите расстояние между NT и SC.
Ответ Решение

2.14. Задание 14

Мини-курс по уравнениям и неравенствам от Бориса Трушина.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 2.14.1. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Решите неравенство $\dfrac{13}{3^x - 81} \leqslant \dfrac{1}{3^x - 9}$.
Ответ Решение

Задача 2.14.2. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Решите неравенство $(16^x - 2 \cdot 4^x + 1)^2 - 23 \cdot (16^x - 2 \cdot 4^x + 1) + 112 \geqslant 0$.
Ответ Решение

Задача 2.14.3. (ЕГЭ-2020. Основная волна)
Решите неравенство $x^2 \log_{243}(4 - x) \leqslant \log_3(x^2 - 8x + 16)$.
Ответ Решение

Задача 2.14.4. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
Решите неравенство $\dfrac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leqslant 1$.
Ответ Решение

Задача 2.14.5. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
Решите неравенство $\dfrac{4^{x^2+x-4} - 0{,}5^{2x^2-2x-1}}{0{,}2 \cdot 5^x - 1} \leqslant 0$.
Ответ Решение

Задача 2.14.6. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)
Решите неравенство $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geqslant 3$.
Ответ Решение

Задача 2.14.7. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Решите неравенство $\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \geqslant \log_{11}\left(\dfrac{x}{x+5} + 7\right)$.
Ответ Решение

Задача 2.14.8. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Решите неравенство $2\log_2(1 - 2x) - \log_2\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) \leqslant \log_2(4x^2 + 6x - 1)$.
Ответ Решение

Задача 2.14.9. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Решите неравенство $2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \leqslant \log_7\left(8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right)$.
Ответ Решение

Задача 2.14.10. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Решите неравенство $\dfrac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leqslant \dfrac{1}{x-5}$.
Ответ Решение

Задача 2.14.11. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
Решите неравенство $2^{x+1} + 0,5^{x-3} \geqslant 17$.
Ответ Решение

Задача 2.14.12. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
Решите неравенство $\log_2^2(25 - x^2) - 7\log_2(25 - x^2) + 12 \geqslant 0$.
Ответ Решение

Задача 2.14.13. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
Решите неравенство $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geqslant 0$.
Ответ Решение

Задача 2.14.14. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Решите неравенство $\dfrac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \dfrac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leqslant 2 \cdot 5^x - 24$.
Ответ Решение

Задача 2.14.15. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Решите неравенство $2\log_{(x^2-8x+17)^2}(3x^2 + 5) \leqslant \log_{x^2-8x+17}(2x^2 + 7x + 5)$.
Ответ Решение

Задачи не из ЕГЭ

Задача 2.14.16. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{5 \cdot (\log_2(x+2) - 1)}{\log_2(x+2) + 1}} \leqslant \log_2\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$.
Ответ Решение

Задача 2.14.17. Решите неравенство $4\log_4^2\left(\sin^3 x\right) + 8\log_2(\sin x) \geqslant 1$.
Ответ Решение

2.15. Задание 15

Мини-курс по экономическим задачам от Бориса Трушина.

Задача 2.15.1. (ЕГЭ-2016 и ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн. рублей, где S – натуральное число. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	07.20	07.21	07.22	07.23	07.24
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн. рублей.
Ответ Решение

Задача 2.15.2. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
Строительство нового завода стоит 220 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продавать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рулей) за один год будет составлять $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$.
Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год, после запуска завода, продукцию запланировали продавать по $p = 9$ тыс. рублей за единицу, а каждый следующий год цену будут повышать на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?
Ответ Решение

Задача 2.15.3. (ЕГЭ-2019. Демоверсия; ЕГЭ-2016. Основная волна)
15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов

по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн. рублей.
Ответ Решение

Задача 2.15.4. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)
В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона B увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m.
Ответ Решение

Задача 2.15.5. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.
Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311 040 рублей?
Ответ Решение

Задача 2.15.6. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в

руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\,000 - P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?
Ответ Решение

Задача 2.15.7. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $(1 + r)$ раз. Пенсионный фонд хочет получить от своих ценных бумаг максимальную выгоду: продать их в такой момент, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей (выкупить их обратно он не может).
Расчеты показали, что для максимальной выгоды ценные бумаги нужно продать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?
Ответ Решение

Задача 2.15.8. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	07.17	07.18	07.19	07.20
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн. рублей.
Ответ Решение

Задача 2.15.9. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары с использованием одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе расположенном во втором городе – 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц продукции при таких условиях можно произвести за неделю на этих двух заводах?
Ответ Решение

Задача 2.15.10. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. S – натуральное число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
– к июлю 2021 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите общую сумму выплат за пять лет в тыс. рублей.
Ответ Решение

Задача 2.15.11. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. S – натуральное число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
– к июлю 2021 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите общую сумму выплат за пять лет в тыс. рублей.
Ответ Решение

Задача 2.15.12. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля.

В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг. алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг. никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?
Ответ Решение

2.16. Задание 16

Мини-курс по планиметрии от Бориса Трушина.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 2.16.1. (ЕГЭ-2023/2022/2021/2020/2019/2018/2017/2016/2015/2014. Демоверсия; ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника ABK, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.
Ответ Решение

Задача 2.16.2. (ЕГЭ-2023. Досрочная волна, резервный день)
Окружность касается одной из сторон прямого угла с вершиной D в точке E и пересекает вторую сторону в точках A и B (точка A лежит между B и D). В окружности проведён диаметр AC.
а) Докажите, что отрезок BC вдвое больше отрезка DE.
б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC, если $AD = 4$ и $AB = 5$.
Ответ Решение

Задача 2.16.3. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна, резервный день)
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AE$. Отрезок BE пересекает AC в точке N, а отрезок AD в точке M.
а) Докажите, что точки C, D, M, N лежат на одной окружности.
б) Точка O – центр окружности, описанной около треугольника CMD. Найдите радиус этой окружности, если $AO = 12$, $AB = 4$.
Ответ Решение

Задача 2.16.4. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
В параллелограмме $ABCD$, угол CAD в два раза меньше угла BAC, биссектриса угла BAC пересекает BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E так, что $AE = CE$.
а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
б) Найти длину отрезка LE, если $AC = 9$, а $\operatorname{tg} \angle ACB = \dfrac{1}{3}$.
Ответ Решение

Задача 2.16.5. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена точка M так, что $AM = MC$.
а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AMD лежит на диагонали AC.
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, а угол ADC равен $60°$.
Ответ Решение

Задача 2.16.6. (ЕГЭ-2021. Досрочная волна)
Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120°$.
Ответ Решение

Задача 2.16.7. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M, что $AD = AM$.
а) Докажите, что $BM = BN$.
б) Найдите MN, если $AC = 4$, $\sin\angle BAD = \dfrac{8}{17}$.
Ответ Решение

Задача 2.16.8. (ЕГЭ-2020. Досрочная волна)
В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.
Ответ Решение

Задача 2.16.9. (ЕГЭ-2020. Основная волна, резервный день)
Точка M – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$.
а) Докажите, что $S_{ABM} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$.
б) На стороне CD отмечена точка K такая, что $S_{BKC} = \dfrac{S_{AKD}}{2}$, причем $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до AB.
Ответ Решение

Задача 2.16.10. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
HARD Точки M и N – середины соответственно боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Окружность проходящая через точки B и C пересекает отрезки MB и CN в точках P и Q соответственно.
а) Докажите, что M, P, Q и N лежат на одной окружности.
б) Найдите длину отрезка QN, если $BC = 4{,}5$, $AD = 21{,}5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD – прямой.
Ответ Решение

Задача 2.16.11. (ЕГЭ-2019. Основная волна)
Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB

вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.
а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.
б) Найдите площадь треугольника APC, если $\angle ABC = 120°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3.
Ответ Решение

Задача 2.16.12. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна)
В треугольнике ABC угол B тупой, H – точка пересечения высот, угол AHC равен $60°$.
а) Докажите, что угол ABC равен $120°$.
б) Найдите BH, если $AB = 7$, $BC = 8$.
Ответ Решение

Задача 2.16.13. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна. Резервный день)
В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны длины сторон и одной диагонали: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.
а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
б) Найдите длину диагонали BD.
Ответ Решение

Задача 2.16.14. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Окружность высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные отрезки.
а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.
б) Пусть окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 23$, $KL = 4$ и $LB = 2$. Найдите высоту трапеции.
Ответ Решение

Задача 2.16.15. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC пересекаются в точке O.
а) Докажите, что $\angle AOE = 90°$.
б) Найдите $BO : OD$.
Ответ Решение

Задача 2.16.16. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
В треугольнике ABC точки A_1B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.
Ответ Решение

Задача 2.16.17. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
Точка M – середина гипотенузы AB треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N.
а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.
б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM, если $\operatorname{tg} \angle BAC = \dfrac{4}{3}$.
Ответ Решение

Задача 2.16.18. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O.
а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.
б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.
Ответ Решение

Задача 2.16.19. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;
б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен $30°$.
Ответ Решение

Задача 2.16.20. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.
а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.
б) Найдите отношение CK к KE, если $\angle ECD = 15°$.
Ответ Решение

Задачи не из ЕГЭ

Задача 2.16.21. На сторонах AD и CD ромба $ABCD$ отмечены точки J, I и L, K соответственно. Причем так, что

$$AI : IJ : JD = CL : LK : KD = 3 : 5 : 4.$$

а) Докажите, что прямые BL, BK, BJ и BI делят меньшую диагональ AC на пять равных отрезков.
б) Найдите площадь треугольника AJM, где M – точка пересечения прямых KA и BJ если дополнительно известно, что площадь ромба равна 72.
Ответ Решение

Задача 2.16.22. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в точках P и Q соответственно.
а) Докажите, что $MPNQ$ – прямоугольник.
б) Найдите площадь этого прямоугольника, если известно, что

$$AD - AB = 4,$$

а угол между диагоналями параллелограмма равен 30°.
Ответ Решение

2.17. Задание 17

Мини-курс по задачам с параметром от Бориса Трушина.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 2.17.1. (ЕГЭ-2023. Демоверсия)
Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9;\\(x + 2)^2 + y^2 = a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.
Ответ Решение

Задача 2.17.2. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 7x + 5a| = x - a$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.3. (ЕГЭ-2022. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 2ax - 3x^2 - 4a - 4x + 8|x| = 0$$

имеет ровно четыре различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.4. (ЕГЭ-2022. Основная волна, резервный день; ЕГЭ-2016. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.5. (ЕГЭ-2021. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}; \\ \log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.
Ответ Решение

Задача 2.17.6. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| + 20 = 4 \cdot |x - a| + 5 \cdot |x + a|$$

имеет ровно два положительных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.7. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{a^2 + 3x - 6a}$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.8. (ЕГЭ-2021. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x^2 - 9| + a|x - 3| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.9. (ЕГЭ-2020. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.10. (ЕГЭ-2020. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_5(16 - y^2) = \log_5(16 - a^2x^2); \\ x^2 + y^2 = 6x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.11. (ЕГЭ-2020. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения α, при каждом из которых уравнение

$$x^4 \sin\alpha + 2x^2 \cos\alpha + \sin\alpha = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.12. (ЕГЭ-2020. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + 2ax - a^2; \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.13. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше, чем -2.
Ответ Решение

Задача 2.17.14. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos x + 2\sin x = a$$

имеет ровно два различных корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$?
Ответ Решение

Задача 2.17.15. (ЕГЭ-2019. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.16. (ЕГЭ-2019. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.17. (ЕГЭ-2019. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.18. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \cdot \ln(9 - x^2 - y^2) = 0; \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \cdot (x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.19. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2; \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.20. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = |2a - 4|; \\ x^4 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.21. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+ay-4)(x+ay-4a)=0; \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.22. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4-y^4=10a-24; \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.23. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(a-3)x-4ay+5a^2-6a=0, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.24. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x+\frac{a^2}{x}+1\right|+\left|x+\frac{a^2}{x}-1\right|=2$$

имеет хотя бы один корень?
Ответ Решение

Задача 2.17.25. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$$

имеет хотя бы один корень?
Ответ Решение

Задача 2.17.26. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geqslant 2; \\ \sqrt{x-1} > a; \\ 3x \leqslant 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[3;\, 4]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.27. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x|+|a| \leqslant 4; \\ x^2+8x < 16a+48 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;\, 0]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.28. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\, 3]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.29. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\, 1]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.30. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.31. (ЕГЭ-2017. Основная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(y^2-xy+x-3y+2)\cdot\sqrt{x+3}=0;\\ a-x-y=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.32. (ЕГЭ-2016. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2-xy-4y+4}{\sqrt{x+2}}=0,\\ y=x+a.\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.33. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$$

имеет ровно три различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.34. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x(x^2+y^2-y-2)=|x|(y-2);\\ y=a+x\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.35. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3, \\ y = x + a. \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.36. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 - 3x - a$$

имеет ровно три различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.37. (ЕГЭ-2015. Досрочная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.
Ответ Решение

Задача 2.17.38. (ЕГЭ-2014. Досрочная волна, резервный день)
Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$3\sqrt[5]{6,2x - 5,2} + 4\log_5(4x+1) + 5a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 6]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.39. (ЕГЭ-2014. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет ровно один корень.
Ответ Решение

Задача 2.17.40. (ЕГЭ-2014. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-2|+|x-a|)^2+(a-30)(|x-2|+|x-a|)+90a-12a^2=0$$

имеет не менее четырех различных корней.
Ответ Решение

Задача 2.17.41. (ЕГЭ-2014. Основная волна)
Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(|x+7|-|x-a|)^2-13a\,(|x+7|-|x-a|)+30a^2+21a-9=0$$

имеет ровно два различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.42. (ЕГЭ-2014. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^{14}x+(a-3\sin x)^7+\sin^2 x+a=3\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.
Ответ Решение

Задача 2.17.43. (ЕГЭ-2013. Основная волна)
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет ровно один корень.
Ответ Решение

Задачи не из ЕГЭ

Задача 2.17.44. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5x+|2x-|x+a||=10|x+1|$$

имеет хотя бы один корень.
Ответ Решение

Задача 2.17.45. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x - a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.
Ответ Решение

Задача 2.17.46. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет ровно один корень.
Ответ Решение

Задача 2.17.47. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет хотя бы один корень, но ни один из корней не принадлежит промежутку $(4; 19)$.
Ответ Решение

Задача 2.17.48. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2$$

имеет ровно четыре различных корня.
Ответ Решение

Задача 2.17.49. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(y - x + 3a) = 0; \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно шесть различных решений.
Ответ Решение

Задача 2.17.50. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 84 = a^2 + 18x; \\ \big||x-8| - |x-6|\big| = y \end{cases}$$

имеет не менее трёх различных решений.

Ответ Решение

Задача 2.17.51. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-a| + |y-a| + |a+1-x| + |a+1-y| = 2; \\ y + 2|x-5| = 6 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ Решение

Задача 2.17.52. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2-4)^2 + y^2 + 8; \\ |y|z^4 + 2z^2 - a^2 z + a + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ Решение

Задача 2.17.53. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1; \\ \log_z \sin y = \log_z a \cdot \log_z (2 - 3\cos x); \\ \log_a z + \log_a \left(\dfrac{1}{2a} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение

Задача 2.17.54. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right| < 3$$

справедливо при всех x.
Ответ Решение

Задача 2.17.55. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a-(a^2-2a)\cos 2x+2}{3-\cos 4x+a^2} < 1$$

содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.
Ответ Решение

Задача 2.17.56. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2+4ax+a^2+2a+2$$

на множестве $|x| \geqslant 1$ не меньше 6.
Ответ Решение

Задача 2.17.57. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax+|x^2-8x+7|$$

больше 1.
Ответ Решение

Задача 2.17.58. Найдите все значения a, при каждом из которых линии

$$y = a|x-2|+|a|-2 \qquad \text{и} \qquad y=\frac{a}{2}$$

ограничивают многоугольник, площадь которого не больше, чем 0,5.
Ответ Решение

Задача 2.17.59. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $f(x) = |a+2| \cdot \sqrt[3]{x}$ имеет ровно четыре корня, где f – чётная периодическая функция с периодом $T = \dfrac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{8}{3}$.

Ответ Решение

Задача 2.17.60. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$5|x-2| + 3|x+a| \leqslant \sqrt{4-y^2} + 7.$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ Решение

Задача 2.17.61. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\sqrt[5]{5|x+4| + 2|x-a| - 2} \leqslant \sqrt[5]{2 + \sqrt{36-y^2}} + \ln\left(\frac{5+\sqrt{36-y^2}}{5|x+4| + 2|x-a| + 1}\right).$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ Решение

Задача 2.17.62. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-a| + 2|y-a| = 5, \\ xy - x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ Решение

2.18. Задание 18

Мини-курс по теории чисел от Бориса Трушина.

Задача 2.18.1. (ЕГЭ-2019. Досрочная, резервный день)
Склад представляет собой прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого равны целому числу метров, а контейнеры прямоугольные параллелепипеды размера $1 \times 1 \times 3$ метра. Контейнеры на складе можно класть так, чтобы стенки контейнеров были параллельны стенам склада.
а) Может ли оказаться так, что полностью заполнить склад размером 120 кубометров нельзя?
б) Может ли оказаться так, что склад объемом 100 кубометров не удастся поместить 33 контейнера?
в) Пусть объем склада равен 800 кубометров. Какое наибольшее количество процентов объема такого склада удастся гарантировано заполнить контейнерами при любых параметрах склада?
Ответ Решение

Задача 2.18.2. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)
Вася и Петя решают задачи из сборника. Они начали решать задачи в один и тот же день, и решили в этот день хотя бы по одной задаче каждый. При этом каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя – на две задачи больше, чем в предыдущий день. В итоге каждый из них решил все задачи из сборника.
а) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое количество задач и при этом Петя прорешал весь сборник за пять дней?
б) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое количество задач и при этом Петя прорешал весь сборник за три дня?
в) Найдите наименьшее количество задач в сборнике, если известно, что каждому из них потребовалось больше 7 дней на решение всех задач, а количество задач, решенных в первый день отличалось на 1.
Ответ Решение

Задача 2.18.3. (ЕГЭ-2018. Досрочная, резервный день)
а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{100}?$$

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что

$$\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| \leqslant \frac{1}{10000}?$$

в) Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом которых значение выражения $\left|\dfrac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$ будет наименьшим.

Ответ Решение

Задача 2.18.4. (ЕГЭ-2018. Осноная волна, резервный день)
а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?
б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?
в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Ответ Решение

Задача 2.18.5. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
В школах #1 и #2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 37 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы #1 в школу #2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе #1 вырасти в два раза?
б) Средний балл в школе #1 вырос на 5% средний балл в школе #2 также вырос на 5%. Мог ли первоначальный балл в школе #2 равняться 1?
в) Средний балл в школе #1 вырос на 5% средний балл в школе #2 также вырос на 5%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе #2.

Ответ Решение

Задача 2.18.6. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит несколько (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 грамм, второй – по 200 грамм, третий – по 300 грамм, а четвертый – по 400 грамм.
а) Может ли оказаться так, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться так, что кроликов было 15 и все они получили разное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?
Ответ Решение

Задача 2.18.7. (ЕГЭ-2018/2017/2016. Демоверсия)
На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (-3), среднее арифметическое положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (-8).
а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
Ответ Решение

Задача 2.18.8. (ЕГЭ-2018. Основная волна)
На доске написано 10 различных натуральных чисел, среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, среднее арифметическое шести наибольших из них равно 12.
а) Может ли наименьшее число быть равно 5?
б) Может ли среднее арифметическое всех чисел быть равным 10?
в) Какое наибольшее среднее арифметическое может быть у всех чисел, написанных на доске?
Ответ Решение

Задача 2.18.9. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна)
На доске написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ каждое из которых не меньше 50 и не больше 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на $r_i\%$ так, чтобы либо $r_i = 2$, либо число a_i уменьшилось на 2.
а) Может ли среднее арифметическое чисел r_i быть равным 5?
б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел r_i больше 2, и при этом сумма чисел a_i уменьшилась более чем на $2n$?
в) Пусть $n = 30$, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел r_i.
Ответ Решение

Задача 2.18.10. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух больше 40 и меньше 100.
а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их 4?
Ответ Решение

Задача 2.18.11. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)
На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.
а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?
Ответ Решение

Задача 2.18.12. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов равно S.
а) Может ли быть, когда $S < 15$?
б) Могло ли значение S быть равным 5?
в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 10 студентов?
Ответ Решение

Задача 2.18.13. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.
а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчивается на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

Ответ Решение

Задача 2.18.14. (ЕГЭ-2017. Основная волна)
Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Ответ Решение

Задача 2.18.15. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
Последовательность состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.
а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.
б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности, состоящей из десяти членов?

Ответ Решение

Задача 2.18.16. (ЕГЭ-2016. Основная волна)
На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из них можно получить числа $(a + b)$ и $(2a - 1)$ или числа $(a + b)$ и $(2b - 1)$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).
а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из

чисел, написанных на доске окажется числом 19.
б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?
в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?
Ответ Решение

Задача 2.18.17. Имеются 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел:

$$-11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19.$$

Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел:

$$-11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19.$$

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 123?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?
Ответ Решение

Задача 2.18.18. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?
Ответ Решение

Задача 2.18.19. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой

группе не превосходит 17.
а) Может ли число S быть равным 34?
б) Может ли число S быть больше $33\frac{1}{18}$?
в) Найдите максимальное возможное значение S.
Ответ Решение

Задача 2.18.20. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.
а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?
б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?
Ответ Решение

§3. Задачник

3.1. Алгебраические задачи

Задача 3.1.1. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

Ответ Решение

Задача 3.1.2. Докажите, что число

$$0{,}123456789101112131415161718192021222324252627282930\ldots$$

является иррациональным.
Решение

Задача 3.1.3. Из натуральных чисел от 1 до 28 выбрали 14 чисел таких, что никакие два выбранных числа не дают в сумме 29. Сумма выбранных чисел равна 203. Какое наименьшее значение может быть у суммы квадратов этих чисел?
Ответ Решение

3.2. Планиметрия

Задача 3.2.1. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.
Решение

Задача 3.2.2. Докажите, что окружность, вписанная в треугольник со сторонами 3, 4, 5, касается его средней линии.
Решение

Задача 3.2.3. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известны длины диагоналей $AC = 26$, $BD = 28$, и средняя линия $EF = 15$.
Ответ Решение

Задача 3.2.4. Длины оснований трапеции равны a и b, длины боковых сторон – c и d. Биссектрисы углов трапеции при боковой стороне c пересекаются в точке N, биссектрисы углов при боковой стороне d пересекаются в точке M. Найдите MN.
Ответ Решение

3.3. Логарифмы

Задача 3.3.1. (Физтех-2018, 11 класс)
Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-3x+2)$, $\log_{x^2}\dfrac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\dfrac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.
Ответ Решение

3.4. Комбинаторика

Задача 3.4.1. Сколько существует различных бус из p бусинок (p – простое), каждая из которых одного из n цветов?
Ответ Решение

Задача 3.4.2. Отметили все 333 вершины правильного 333-угольника. Сколько существует равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
Ответ Решение

Задача 3.4.3. (Физтех-2018, 11 класс)
На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 6$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки

из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ Решение

Задача 3.4.4. (Физтех-2018, 11 класс)
Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных натуральных чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 192$.

Ответ Решение

Задача 3.4.5. (Физтех-2017, 11 класс)
На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ Решение

3.5. Теория чисел

Задача 3.5.1. (ВПР, 4 класс)
Андрей вырезал из бумаги несколько пятиугольников и шестиугольников. Всего у вырезанных фигур 27 вершин. Сколько пятиугольников вырезал Андрей?

Ответ Решение

Задача 3.5.2. Определите на какую наибольшую степень двойки делится число $\dfrac{4034!}{2017!}$.

Ответ Решение

Задача 3.5.3. Докажите, что произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

Решение

3.6. Математический анализ

Задача 3.6.1. Что больше e^π или π^e?
Ответ Решение

§4. Красивые задачи

4.1. Зацикленный поезд

По кольцевой железной дороге едет поезд, последний вагон которого сцеплен с первым так, что внутри можно свободно перемещаться между вагонами. Вы оказались в одном случайном вагоне и ваша задача – подсчитать их общее количество. В каждом вагоне можно включать и выключать свет, но начальное положение переключателей случайное и заранее неизвестно.

4.2. Задача про монетку

Злой Дух поймал Дмитрия и Алексея, и посадил их в разные комнаты своего страшного дома. Затем Злой Дух подбросил симметричную монетку бесконечное количество раз. Все результаты чётных бросков он сообщил Дмитрию, а все результаты нечётных – Алексею. Далее Дух предлагает каждому из них назвать номер любого подбрасывания, результат которого ему не известен. То есть Дмитрий должен назвать нечётный номер, а Алексей – чётный. При этом они всё ещё находятся в разных комнатах и не слышат ответы друг друга. Если результаты бросков, названных Дмитрием и Алексеем, одинаковые, то Злой Дух дарит им свободу. Если же результаты бросков отличаются, то Злой Дух съедает обоих. Алексей и Дмитрий, конечно, знали о повадках Злого Духа и могли заранее до похищения договориться о стратегиях. Какую стратегию им выбрать, чтобы вероятность спасения была больше 50%?

4.3. Тысячеугольник

Существует ли тысячеугольник, все стороны и диагонали которого имеют целую длину?

4.4. Плотное множество на окружности

Существует ли счётное всюду плотное множество точек на окружности диаметра 1, попарные расстояния между которыми рациональны?

4.5. Лев против дрессировщика

Разъяренный Лев и Дрессировщик находятся на круглой зарешеченной арене. В начальный момент Дрессировщик стоял в центре круга, а Лев сидел у границы арены. Сможет ли Дрессировщик так бегать по арене, чтобы Лев не смог настигнуть его, если их скорости равны? При этом считаем, что Лев и Дрессировщик – это две точки на круге, и Лев настигает Дрессировщика лишь в том случае, если эти точки совпадают.

§5. Ответы

2.1.1. 9. 2.1.2. 134. 2.1.3. 29. 2.1.4. 16. 2.1.5. 65. 2.1.6. 8. 2.1.7. 2.
2.2.1. 21. 2.2.2. 12. 2.2.3. 27. 2.2.4. 9. 2.2.5. 75. 2.2.6. 23,5. 2.2.7. 28.
2.3.1. 0,2. 2.3.2. 0,2. 2.3.3. 0,65. 2.3.4. 0,98. 2.3.5. 0,5. 2.3.6. 0,16.
2.3.7. 0,5. 2.4.1. 0,03. 2.4.2. 0,059. 2.4.3. 0,0064. 2.4.4. 0,4872.
2.5.1. −11. 2.5.2. 10. 2.5.3. −1. 2.5.4. 4. 2.5.5. 10. 2.5.6. 0,2.
2.5.7. −11. 2.5.8. −124. 2.6.1. 196. 2.6.2. −0,5. 2.6.3. 4. 2.6.4. 4.
2.6.5. −16. 2.6.6. −136. 2.6.7. 5. 2.6.8. 0. 2.6.9. 10. 2.7.1. −2.
2.7.2. 4. 2.7.3. −1. 2.7.4. −3. 2.8.1. 45. 2.8.2. 301. 2.8.3. 4,4.
2.8.4. 5500. 2.8.5. 5. 2.9.1. 120. 2.9.2. 10. 2.9.3. 15. 2.9.4. 70.
2.9.5. 225. 2.9.6. 8. 2.9.7. 18. 2.9.8. 30. 2.9.9. 33,6. 2.9.10. 35.
2.9.11. 16. 2.10.1. 6. 2.10.2. 8. 2.10.3. 16. 2.11.1. −5. 2.11.2. 4.
2.11.3. 11. 2.11.4. 7.
2.12.1. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = -\frac{25\pi}{6}$, $x = -\frac{7\pi}{2}$. 2.12.2. а) $x = -2$, $x = -1$; б) $x = -1$.
2.12.3. а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = -\frac{5\pi}{2}$, $x = -\frac{9\pi}{4}$, $x = -\frac{7\pi}{4}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$.
2.12.4. а) $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = \frac{11\pi}{4}$, $x = 3\pi$, $x = 4\pi$. 2.12.5. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = \frac{8\pi}{3}$, $x = 3\pi$, $x = \frac{11\pi}{3}$, $x = 4\pi$.
2.12.6. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x = -\frac{10\pi}{3}$, $x = -3\pi$, $x = -\frac{8\pi}{3}$.
2.12.7. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{3\pi}{4}$.
2.12.8. а) $x = -1$, $x = 2$; б) $x = -1$.
2.12.9. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = -2\pi$, $x = -\frac{11\pi}{6}$, $x = -\frac{7\pi}{6}$.
2.12.10. а) $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x = -\frac{7\pi}{2}$, $x = -3\pi$.
2.12.11. а) $x = 2$, $x = -2$; б) $x = 2$. 2.12.12. а) $x = 2$, $x = 5$; б) $x = 2$.
2.12.13. а) $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$; б) $x = \frac{1}{2}$. 2.12.14. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = 3\pi$, $x = \frac{7\pi}{2}$. 2.12.15. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $-\frac{7\pi}{3}$. 2.12.16. а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{13\pi}{6}$.
2.12.17. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

2.12.18. а) $x = \pi k$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $x = -4\pi$, $x = -\dfrac{10\pi}{3}$, $x = -3\pi$, $x = -\dfrac{8\pi}{3}$.
2.12.19. а) $x = \pi k$, $x = \pi \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x = 2\pi$, $x = \dfrac{8\pi}{3}$, $x = 3\pi$.
2.13.1. б) 45°. 2.13.2. б) $\sqrt{7}$. 2.13.3. б) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. 2.13.4. б) $\dfrac{60}{13}$.
2.13.5. б) $8\sqrt{6}$. 2.13.6. б) $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}} = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$. 2.13.7. б) $\sqrt{11}$.
2.13.8. б) $\dfrac{3}{4}$. 2.13.9. б) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. 2.14.1. $x \in (-\infty;\ 1] \cup (2;\ 4)$.
2.14.2. $x \in \big(-\infty;\ \log_4(1+\sqrt{7})\big] \cup [\log_4 5;\ +\infty)$.
2.14.3. $x \in [-\sqrt{10};\ 3] \cup [\sqrt{10};\ 4)$. 2.14.4. $x \in [2;\ 3)$.
2.14.5. $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left(1;\ \dfrac{3}{2}\right]$. 2.14.6. $x \in (-\infty;\ -\log_3 5 - 1] \cup [1;\ +\infty)$.
2.14.7. $x \in (-\infty;\ -12] \cup \left(-\dfrac{35}{8};\ 0\right]$. 2.14.8. $x \in \left[\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{2}\right)$.
2.14.9. $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{5}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$. 2.14.10. $x \in [0;\ 2) \cup (2;\ 5)$.
2.14.11. $x \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty)$. 2.14.12. $x \in \big(-5;\ -\sqrt{17}\big] \cup [-3;\ 3] \cup \big[\sqrt{17};\ 5\big)$.
2.14.13. $x \in \{0\} \cup [2;\ +\infty)$. 2.14.14. $x \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ \log_5 7)$.
2.14.15. $x \in [0;\ 4) \cup (4;\ 7]$. 2.14.16. $x \in \{0\} \cup \big[2^{\sqrt{6}} - 2;\ +\infty\big)$.
2.14.17. $x \in \left(2\pi k;\ \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. 2.15.1. 36.
2.15.2. 5. 2.15.3. 7. 2.15.4. 4%. 2.15.5. 201 300. 2.15.6. 12,5.
2.15.7. $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$. 2.15.8. 8. 2.15.9. 100. 2.15.10. 1050.
2.15.11. 1050. 2.15.12. 120 кг. 2.16.1. б) 3,2. 2.16.2. б) 6.
2.16.3. б) $8\sqrt{2}$. 2.16.4. б) $\dfrac{39}{8}$. 2.16.5. б) $\dfrac{5}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$. 2.16.6. б) $4\sqrt{3}$.
2.16.7. б) $\dfrac{120}{17}$. 2.16.8. б) $\dfrac{5}{4}$. 2.16.9. б) 7,5. 2.16.10. б) 7,28.
2.16.11. б) $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. 2.16.12. б) $\dfrac{13}{\sqrt{3}}$. 2.16.13. б) $\dfrac{55}{7}$. 2.16.14. б) 20.
2.16.15. б) 3. 2.16.16. б) 1. 2.16.17. б) $\dfrac{5}{4}$. 2.16.18. б) 1. 2.16.19. б) $\dfrac{3}{4}$.
2.16.20. б) 2. 2.16.21. б) $\dfrac{48}{11}$. 2.16.22. б) 4. 2.17.1. $a \in \{2, \sqrt{65}+3\}$.
2.17.2. $a \in (-8;\ -2-\sqrt{13}) \cup (0;\ 1) \cup (\sqrt{13}-2;\ 2)$. 2.17.3. $a \in (0;\ 2-\sqrt{3})$.
2.17.4. $a \in [2;\ 4)$. 2.17.5. $a = 1$.
2.17.6. $a \in (-\infty;\ -5] \cup \left\{-\dfrac{9}{2}\right\} \cup \left[-4;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right) \cup (5;\ +\infty)$.
2.17.7. $a \in \{-3\} \cup \left[0;\ \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2};\ 9\right)$. 2.17.8. $a \in \left(0;\ \dfrac{4}{49}\right) \cup \left(\dfrac{1}{6};\ +\infty\right)$.
2.17.9. $a \in (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$.

2.17.10. $a = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
2.17.11. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{R}$. 2.17.12. $a \in (-2\sqrt{2}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{2})$.
2.17.13. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$. 2.17.14. $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{5}\right)$.
2.17.15. $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$.
2.17.16. $a \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$.
2.17.17. $a \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2})$. 2.17.18. $a \in (1; 2] \cup [8; 9)$.
2.17.19. $a \in \{2; 6\}$. 2.17.20. $a \in \left(4 - 2\sqrt{2}; \frac{4}{3}\right) \cup \left(4; 4 + 2\sqrt{2}\right)$.
2.17.21. $a \in \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}; -\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$.
2.17.22. $a \in (2; 4) \cup (6; +\infty)$.
2.17.23. $a \in (1 - \sqrt{2}; 0) \cup \left(0; \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; -3 + 3\sqrt{2}\right)$. 2.17.24. $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
2.17.25. $a \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$. 2.17.26. $a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$. 2.17.27. $a \in (8 - 8\sqrt{2}; 4]$.
2.17.28. $a \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{11}{2}; \frac{23}{4}\right)$. 2.17.29. $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{4}; 2\right)$.
2.17.30. $a \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. 2.17.31. $a \in (-4; -2] \cup \{0\}$.
2.17.32. $a \in \{-3\} \cup [0; 3)$. 2.17.33. $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.
2.17.34. $a \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup [0; 2) \cup (2; 2\sqrt{2})$. 2.17.35. $a \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$.
2.17.36. $a \in (-\infty; -9) \cup (-9; 0)$. 2.17.37. $a \in (-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$.
2.17.38. $a \in \left[-\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}\right]$. 2.17.39. $a \in \{3; 7\}$.
2.17.40. $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{30}{7}\right) \cup \left(\frac{30}{7}; \frac{32}{5}\right]$. 2.17.41. $a \in \left(-\frac{4}{11}; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; \frac{10}{9}\right)$.
2.17.42. $a \in [-4; 2]$. 2.17.43. $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.
2.17.44. $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. 2.17.45. $a \in [-6; 8]$.
2.17.46. $a \in \{0; 2\sin 1\}$. 2.17.47. $a \in \left[\frac{3}{2}; 3\right] \cup [6; +\infty]$.
2.17.48. $a \in \left(-\frac{1}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$. 2.17.49. $a \in \left(0; \frac{4}{9}\right) \cup (1; +\infty)$.
2.17.50. $a \in [-\sqrt{8}; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; \sqrt{8}]$. 2.17.51. $a \in \left\{2; \frac{16}{3}\right\}$. 2.17.52. $a = -2$.
2.17.54. $a \in (-1; 5)$. 2.17.55. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. 2.17.56. $a \in \{0\} \cup [2; +\infty)$.
2.17.57. $a \in \left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$. 2.17.58. $a \in \left[-2; -\frac{4}{3}\right) \cup [2; 4)$.
2.17.59. $a \in \left\{-\frac{18}{41}; \frac{18}{23}\right\}$. 2.17.60. $a \in [-5; 1]$. 2.17.61. $a \in [-9; 1]$.

2.17.62. $a \in \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{2}\right\}$. 2.18.1. а) нет; б) да; в) 99. 2.18.2. а) да; б) нет; в) 88. 2.18.3. а) да; б) нет; в) 24. 2.18.4. а) да; б) нет; в) 5. 2.18.5. а) нет; б) нет; в) 3. 2.18.6. а) да; б) нет; в) 9. 2.18.7. а) 44; б) отрицательных; в) 17. 2.18.8. а) нет; б) нет; в) 9,5. 2.18.9. а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$. 2.18.10. а) да; б) нет; в) 35. 2.18.11. а) да; б) нет; в) 3. 2.18.12. а) да; б) нет; в) 85. 2.18.13. а) нет; б) нет; в) 11. 2.18.14. а) да; б) нет; в) $\{7, 8, 10, 16\}$ или $\{7, 8, 8, 8, 10\}$. 2.18.15. а) 1, 12, 17, 20; б) 1, 12, 20, 20, 12, 1; в) 70. 2.18.16. а) (2; 3), (5; 5), (10; 9), (19; 19); б) нет; в) 2. 2.18.17. а) нет; б) нет; в) 4. 2.18.18. а) нет; б) нет; в) да. 2.18.19. а) нет; б) нет; в) $33\frac{1}{18}$. 2.18.20. а) да; б) 4. 3.1.1. 44. 3.1.3. 3857. 3.2.3. 336. 3.2.4. $\left|\frac{(a+b)-(c+d)}{2}\right|$. 3.3.1. 3. 3.4.1. $\frac{n^p - n}{p} + n$. 3.4.2. 55056. 3.4.3. 80676. 3.4.4. $\{1; 104; 191\}$. 3.4.5. 1560. 3.5.1. 3. 3.5.2. 2017. 3.6.1. e^{π}.