Математический анализ. Лекция V

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

17 сентября 2013 г.

Упражнение

Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Упражнение

Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема

Последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел.

Упражнение

Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема

Последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Из неравенства Бернулли следует, что

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1 + \frac{n+1}{n} > 2.$$

Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Используя неравенство Бернулли, получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Используя неравенство Бернулли, получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

Значит, последовательнось $\{x_n\}$ сходится.
Но тогда существует и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Используя неравенство Бернулли, получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

Значит, последовательнось $\{x_n\}$ сходится.
Но тогда существует и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Определение

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Определение

Пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Определение

Пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Определение

Частичным пределом последовательности называется предел какой-либо ее подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение

Пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Определение

Частичным пределом последовательности называется предел какой-либо ее подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

Упражнение

Элемент $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности тогда и только тогда, когда любая окрестность $U(\mu)$ содержит бесконечное множество элементов последовательности.

Упражнение

Пусть $\{r_n\}$ – каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел. Найдите множество ее частичных пределов.

Упражнение

Пусть $\{r_n\}$ – каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел. Найдите множество ее частичных пределов.

Определение

Верхним пределом последовательности $\{a_n\}$ называется наибольший в $\overline{\mathbb{R}}$ из ее частичных пределов.
Его обозначают символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Упражнение

Пусть $\{r_n\}$ – каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел. Найдите множество ее частичных пределов.

Определение

Верхним пределом последовательности $\{a_n\}$ называется наибольший в $\overline{\mathbb{R}}$ из ее частичных пределов.
Его обозначают символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Упражнение

Пусть $\{r_n\}$ – каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел. Найдите множество ее частичных пределов.

Определение

Верхним пределом последовательности $\{a_n\}$ называется наибольший в $\overline{\mathbb{R}}$ из ее частичных пределов.
Его обозначают символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием более общей теоремы.

Теорема

Всякая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхний и нижний пределы.

Теорема

Всякая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхний и нижний пределы.

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность. Рассмотрим множество $X = \{x : \ x \in \mathbb{R}$, правее x лежит бесконечно много элементов последовательности$\}$.

Теорема

Всякая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхний и нижний пределы.

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность. Рассмотрим множество $X = \{x : \ x \in \mathbb{R}$, правее x лежит бесконечно много элементов последовательности$\}$.

I случай. $X = \varnothing$. Это значит, что любая окрестность $U(-\infty)$ содержит почти все элементы последовательности, то есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Следовательно, $-\infty$ – единственный частичный предел последовательности $\{a_n\}$, так что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Теорема

Всякая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхний и нижний пределы.

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность. Рассмотрим множество $X = \{x: \ x \in \mathbb{R}$, правее x лежит бесконечно много элементов последовательности$\}$.

I случай. $X = \varnothing$. Это значит, что любая окрестность $U(-\infty)$ содержит почти все элементы последовательности, то есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Следовательно, $-\infty$ – единственный частичный предел последовательности $\{a_n\}$, так что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty$.

II случай. $X \neq \varnothing$. Тогда $\exists \sup X = b$, $-\infty < b \leqslant +\infty$. Покажем, что $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $b'_\varepsilon \in U_\varepsilon(b)$, $b'_\varepsilon < b$. Тогда из определения верхней грани множества следует, что найдется $x'_\varepsilon \in X$: $b'_\varepsilon < x'_\varepsilon \leqslant b$. Поэтому правее b'_ε лежит бесконечно много элементов последовательности $\{a_n\}$. Если $b'' > b$, то $b'' \notin X$, так что правее b'' лежит не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $U_\varepsilon(b)$ содержит бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, b – частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

Остается показать, что b – наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то есть $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Остается показать, что b – наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то есть $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.
Допустим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее b'' находится не более конечного числа элементов последовательности.
Следовательно, $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Остается показать, что b – наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то есть $b = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$.

Допустим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее b'' находится не более конечного числа элементов последовательности.

Следовательно, $b = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$.

Упражнение

Докажите теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

Остается показать, что b – наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то есть $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Допустим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее b'' находится не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Упражнение

Докажите теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

Теорема

Последовательность имеет единственный в $\overline{\mathbb{R}}$ частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится в $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$ к a. Пусть $\{a_{n_k}\}$ – произвольная ее подпоследовательность. По определению предела последовательности любая окрестность $U(a)$ содержит значения почти всех элементов последовательности $\{a_n\}$, а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$ к a. Пусть $\{a_{n_k}\}$ – произвольная ее подпоследовательность. По определению предела последовательности любая окрестность $U(a)$ содержит значения почти всех элементов последовательности $\{a_n\}$, а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный частичный предел. Обозначим его через a и покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Допустим противное, то есть что a не является пределом последовательности. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ находятся значения бесконечного множества элементов последовательности. Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, все элементы которой лежат вне $U_{\varepsilon_0}(a)$. По обобщенной теореме Больцано–Вейерштрасса последовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел, являющийся частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Он не совпадает с a, так как

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\to\; a_{n_k} \notin U_{\varepsilon_0}(a),$$

что противоречит предположению о единственности частичного предела последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для нее выполнено *условие Коши*:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\rightarrow\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\; \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \;\rightarrow\; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для нее выполнено *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\; \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \;\to\; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши)

Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для нее выполнено *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \rightarrow\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши)

Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow\ |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $n, m \geqslant n_\varepsilon$, то $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Покажем, что она сходится.
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда из определения следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ |a_n - a_{n_1}| < 1,$$

так что

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ |a_n| < 1 + |a_{n_1}|.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Покажем, что она сходится.

Последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда из определения следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}:\ \forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow\ |a_n - a_{n_1}| < 1,$$

так что

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow\ |a_n| < 1 + |a_{n_1}|.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Покажем, что a является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Покажем, что она сходится.
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда из определения следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow \ |a_n - a_{n_1}| < 1,$$

так что

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow \ |a_n| < 1 + |a_{n_1}|.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.
По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Покажем, что a является пределом последовательности $\{a_n\}$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall\, k \geqslant k_\varepsilon \ \rightarrow \ |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$\forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Покажем, что она сходится.
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда из определения следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow \ |a_n - a_{n_1}| < 1,$$

так что

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \rightarrow \ |a_n| < 1 + |a_{n_1}|.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.
По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Покажем, что a является пределом последовательности $\{a_n\}$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall\, k \geqslant k_\varepsilon \ \rightarrow \ |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$\forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.