Математический анализ. Лекция XLV

Система неявных функций

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

14 мая 2014 г.

Система неявных функций

Рассмотрим задачу о возможности разрешить систему m уравнений относительно m переменных.
Для системы m функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ переменного $t = (t_1, \dots, t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix}$$

называется ее *якобианом*.
Будем использовать обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$

$$y = (y_1, \dots, y_m) = (\tilde{y}, y_m), \quad \tilde{y} = (y_1, \dots, y_{m-1}),$$

Теорема

Пусть

1. функции $F_j(x, y) = F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ $(j = 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$;
2. $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$;
3. $J = \left. \dfrac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$, на которой

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^m \quad \Leftrightarrow \quad \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

где $(f_1, \dots, f_m)$: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}^m$, функции f_j непрерывно дифференцируемы на $Q_\varepsilon(x^{(0)})$, $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, \dots, m)$. При этом

$$F_j(x, f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \ \forall\, x \in Q_\varepsilon(x^{(0)}) \ (j = 1, \dots, m).$$

Доказательство проведем индукцией по m – числу уравнений системы

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^{m}.$$

При $m = 1$ теорема верна (доказано на предыдущей лекции). Предположим, что теорема справедлива для $m - 1$ уравнений, и покажем, что она верна и для случая m уравнений.

Доказательство проведем индукцией по m – числу уравнений системы

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^{m}.$$

При $m = 1$ теорема верна (доказано на предыдущей лекции). Предположим, что теорема справедлива для $m - 1$ уравнений, и покажем, что она верна и для случая m уравнений.
Разложив определитель J по элементам последнего столбца, видим, что, по крайней мере, для одного элемента этого столбца алгебраическое дополнение отлично от нуля. Ради определенности будем считать, что

$$J_{m-1} = \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$$

В силу предположения индукции систему первых $m-1$ уравнений можно разрешить относительно $y_1, \ldots, y_{m-1}$. То есть, существуют число $\eta > 0$ и непрерывно дифференцируемые функции

$$\varphi_j : \ Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = y_j^{(0)} \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

такие, что исходная система уравнений на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset U(x^{(0)}, y^{(0)})$ эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ F_m(x, y) = 0. \end{cases}$$

При этом

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

при $(x, y_m) \in Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$.

Очевидно, что последняя система равносильна на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)})$ следующей:

$$\begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ \Phi(x, y_m) = 0 \end{cases}$$

при

$$\Phi(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m),$$

$$\Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = F_m(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0.$$

Убедимся, что последнее уравнение последней системы можно разрешить относительно y_m.

В самом деле, функция Φ непрерывно дифференцируема на $Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$ как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, $\Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = 0$.

Остается проверить, что $\dfrac{\partial \Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0$, и сослаться на теорему о неявной функции.

Заметим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}.$$

В то же время результатом дифференцирования тождеств

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 \quad (j = 1, \dots, m-1)$$

по y_m являются тождества

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Но тогда

$$J = \left.\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом последнее равенство получено прибавлением к последнему столбцу определителя всех предшествующих столбцов, умноженных на $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}$ $(j = 1, \dots, m-1)$ соответственно.

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0.$$

Разрешив последнее уравнение последней системы относительно y_m в соответствии с теоремой о неявной функции, получаем, что на некоторой кубической окрестности $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \subset Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$

$$\Phi(x, y_m) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_m = f_m(x),$$

где функция $f_m\colon Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $f_m(x^{(0)}) = y_m^{(0)}$,

$$\Phi(x, f_m(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in Q_\varepsilon(x^{(0)}).$$

Тогда исходная система на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$ равносильна

$$\{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

где

$$f_j(x) = \varphi_j(x, f_m(x)) \quad (i = 1,\ \ldots,\ m-1).$$

При этом функции $f_j\colon Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, m)$.
Теорема доказана.