Математический анализ. Лекция XLIII

Функции комплексного переменного

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

7 мая 2014 г.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1};$$

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1};$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1};$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Радиус сходимости этих рядов $R = +\infty$. Это следует из сходимости при $x \in (-\infty, +\infty)$ соответствующих вещественных рядов.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1};$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Радиус сходимости этих рядов $R = +\infty$. Это следует из сходимости при $x \in (-\infty, +\infty)$ соответствующих вещественных рядов.
Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ при $z = x$ совпадают соответственно с e^x, $\sin x$, $\cos x$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Установим некоторые свойства введенных функций. Покажем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Установим некоторые свойства введенных функций. Покажем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Поскольку абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно, а сумма полученного абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки его членов, получаем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z_1^{n-k} z_2^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти формулы называются *формулами Эйлера*.

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти формулы называются *формулами Эйлера*.
Из последнего равенства при $z = 0 + iy$ видно, что в комплексной плоскости функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными.

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти формулы называются *формулами Эйлера*.
Из последнего равенства при $z = 0 + iy$ видно, что в комплексной плоскости функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными.
Из этих равенств легко получаются следующие обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти формулы называются *формулами Эйлера*.
Из последнего равенства при $z = 0 + iy$ видно, что в комплексной плоскости функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными.
Из этих равенств легко получаются следующие обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

А, значит, остаются справедливыми и все остальные тригонометрические формулы.

Из полученных свойств следует, что

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Из полученных свойств следует, что

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отсюда, в частности, видно, что функция e^z – периодическая с периодом $2\pi i$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

– *модуль* z, а под φ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi = \arg z$.

Из полученных свойств следует, что

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отсюда, в частности, видно, что функция e^z – периодическая с периодом $2\pi i$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

– *модуль* z, а под φ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi = \arg z$. В силу 2π-периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в качестве φ можно взять $\varphi = z$, где

$$z = \arg z + 2k\pi$$

при произвольном фиксированном $k \in \mathbb{Z}$.

Из полученных свойств следует, что

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отсюда, в частности, видно, что функция e^z – периодическая с периодом $2\pi i$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

– *модуль* z, а под φ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi = \arg z$. В силу 2π-периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в качестве φ можно взять $\varphi = z$, где

$$z = \arg z + 2k\pi$$

при произвольном фиксированном $k \in \mathbb{Z}$. При этом z называется *аргументом* числа z, а $\arg z$ – *главным значением аргумента* числа z.

Формулу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. Из нее можно получить *показательную форму* комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = z.$$

Формулу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. Из нее можно получить *показательную форму* комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = z.$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа.

Формулу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. Из нее можно получить *показательную форму* комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = z.$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа.
Пусть $z_j = r_j e^{i\varphi_j} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

Формулу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. Из нее можно получить *показательную форму* комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = z.$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа. Пусть $z_j = r_j e^{i\varphi_j} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

При $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ получаем *формулу Муавра*

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$.

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$.

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$. Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$. Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Однако, если $\varphi = z = \arg z + 2k\pi = \varphi_0 + 2k\pi$, то

$$\cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

имеют различные значения при различных $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$. Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Однако, если $\varphi = z = \arg z + 2k\pi = \varphi_0 + 2k\pi$, то

$$\cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

имеют различные значения при различных $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Поэтому для $z \neq 0$ существуют n различных значений $\sqrt[n]{z}$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все эти значения располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке 0, деля эту окружность на дуги равной длины.

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл
$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x^2}}{x^4}\,dx.$$
2. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x;y) = \frac{|x|^{3/5}y^{3/7}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{при } y \neq 0;$$
$$f(x;0) = 0.$$