Математический анализ. Лекция XL

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

18 апреля 2014 г.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема

Пусть последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, равномерно сходится на E к функции f. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in E$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема

Пусть последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n \colon E \to \mathbb{R}$, равномерно сходится на E к функции f. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in E$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ |f(x) - f_N(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E.$$

Тогда при $x \in E$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| +$$

$$+|f(x_0) - f_N(x_0)| < 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(x_0)|.$$

В силу непрерывности функции f_N в точке x_0

$$\exists\,\delta = \delta_\varepsilon > 0 : \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\forall\, x \in U_\delta(x_0) \ \to \ |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$.

В силу непрерывности функции f_N в точке x_0

$$\exists\,\delta = \delta_\varepsilon > 0: \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\forall\, x \in U_\delta(x_0) \ \to \ |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$.

Теорема

Пусть функциональный ряд $\sum u_k$, где $u_k \colon E \to \mathbb{R}$, равномерно сходится на E. Если все члены u_k ряда непрерывны в точке $x_0 \in E$, то сумма ряда $S = \sum u_k$ непрерывна в точке x_0.

В силу непрерывности функции f_N в точке x_0

$$\exists\,\delta = \delta_\varepsilon > 0: \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\forall\, x \in U_\delta(x_0) \ \rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$.

Теорема

Пусть функциональный ряд $\sum u_k$, где u_k: $E \to \mathbb{R}$, равномерно сходится на E. Если все члены u_k ряда непрерывны в точке $x_0 \in E$, то сумма ряда $S = \sum u_k$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему к функциям $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $f = S$.

Теорема

Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a;b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема

Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a;b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.
Тогда

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Функция f непрерывна на $[a;b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a;b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a;b], \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Теорема

Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a; b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Функция f непрерывна на $[a; b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a; b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a; b], \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Следовательно, для всех $n \geqslant N$

$$\sup_{x\in[a;b]} \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon(b-a),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие

В условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a; b].$$

Следствие

В условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a; b].$$

В связи с этим равенством предыдущую теорему называют *теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла*.

Теорема (о почленном интегрировании ряда)

Пусть функции u_k непрерывны на отрезке $[a; b]$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a; b]$. Тогда и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt$$

равномерно сходится на $[a; b]$

Теорема (о почленном интегрировании ряда)

Пусть функции u_k непрерывны на отрезке $[a; b]$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a; b]$. Тогда и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt$$

равномерно сходится на $[a; b]$ и

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a; b].$$

Теорема (о почленном интегрировании ряда)

Пусть функции u_k непрерывны на отрезке $[a; b]$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a; b]$. Тогда и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt$$

равномерно сходится на $[a; b]$ и

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt \quad \forall\, x \in [a; b].$$

Доказательство. Положим $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и применим предыдущую теорему и следствие из нее.

Теорема

Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций сходится в точке $c \in [a; b]$, а последовательность производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой функции φ.
Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a; b]$ функции f и $f' = \varphi$.

Теорема

Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций сходится в точке $c \in [a; b]$, а последовательность производных $\{f'_n\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой функции φ.
Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a; b]$ функции f и $f' = \varphi$.

Доказательство. Функция φ непрерывна на $[a; b]$ как равномерный предел непрерывных функций. В силу формулы Ньютона–Лейбница получаем, что

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n(t)\,dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_c^x \varphi(t)\,dt \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема

Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций сходится в точке $c \in [a; b]$, а последовательность производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой функции φ.
Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a; b]$ функции f и $f' = \varphi$.

Доказательство. Функция φ непрерывна на $[a; b]$ как равномерный предел непрерывных функций. В силу формулы Ньютона–Лейбница получаем, что

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t)\,dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int_c^x \varphi(t)\,dt \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Числовую сходящуюся последовательность $\{f_n(c)\}$ можно считать, функциональной последовательностью, равномерно сходящейся на $[a; b]$.
Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к некоторой функции f.

Переходя в левой части последней формулы к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a;b].$$

Правая часть этого равенства (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) является дифференцируемой на отрезке $[a;b]$ функцией. Следовательно, таковой является и левая часть, а значит, и функция f. Дифференцируя равенство почленно, получаем, что $f'(x) = \varphi(x)$ $\forall\, x \in [a;b]$.

Теорема доказана.

Переходя в левой части последней формулы к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a; b].$$

Правая часть этого равенства (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) является дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функцией. Следовательно, таковой является и левая часть, а значит, и функция f. Дифференцируя равенство почленно, получаем, что $f'(x) = \varphi(x)$ $\forall\, x \in [a; b]$.

Теорема доказана.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда)

Пусть ряд $\sum u_k$ непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций сходится в точке $c \in [a; b]$, а ряд $\sum u_k'$ равномерно сходится на $[a; b]$.

Тогда ряд $\sum u_k$ равномерно сходится на $[a; b]$, его сумма непрерывно дифференцируема на $[a; b]$ и

$$\left(\sum u_k\right)' = \sum u_k' \quad \text{на} \quad [a; b].$$

Доказательство. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и применим предыдущую теорему.

Степенные ряды

В этой главе будем рассматривать функции $f(z) = f(x + iy)$ комплексного переменного $z = x + iy$. На эти функции переносятся понятия непрерывности в точке и на множестве, сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве функциональной последовательности и функционального ряда.

Степенные ряды

В этой главе будем рассматривать функции $f(z) = f(x + iy)$ комплексного переменного $z = x + iy$. На эти функции переносятся понятия непрерывности в точке и на множестве, сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве функциональной последовательности и функционального ряда.

Определение

Функциональный ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
где a_n и z_0 – комплексные числа, а z – комплексное переменное, называется *степенным рядом*.

Определение

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется (неотрицательное число или символ $+\infty$):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$ – формула Коши–Адамара,

Определение

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется (неотрицательное число или символ $+\infty$):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ – формула Коши–Адамара,

кругом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется круг

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}.$$

Определение

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется (неотрицательное число или символ $+\infty$):

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ – формула Коши–Адамара,}$$

кругом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется круг

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}.$$

Круг сходимости ряда является открытым множеством. При $R = +\infty$ он совпадает со всей комплексной плоскостью, а при $R = 0$ является пустым множеством.

Определение

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется (неотрицательное число или символ $+\infty$):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ – формула Коши–Адамара,

кругом сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется круг

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}.$$

Круг сходимости ряда является открытым множеством. При $R = +\infty$ он совпадает со всей комплексной плоскостью, а при $R = 0$ является пустым множеством.

Вопросы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ достаточно изучить в случае $z_0 = 0$, то есть для рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Из признака Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами следует следующее утверждение.

Лемма

Пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ – ряд с неотрицательными членами, $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{b_n}$. Тогда

1. при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходится;
2. при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ расходится.

Из признака Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами следует следующее утверждение.

Лемма

Пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ – ряд с неотрицательными членами, $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{b_n}$. Тогда

1. при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходится;
2. при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ расходится.

Из этой леммы следует, что для степенного ряда

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R},$$

где R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Сравнивая $q = \frac{|z|}{R}$ с единицей, получаем следующую теорему.

Теорема

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда

1. при $|z| < R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится и даже абсолютно;
2. при $|z| > R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится и даже его общий член $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда

1. при $|z| < R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится и даже абсолютно;
2. при $|z| > R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится и даже его общий член $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Упражнение

Докажите, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ можно определить формулой

$$R = \sup\{r : \ r \geqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0\}.$$

Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда)

Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $0 < r < R$. Тогда на замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant r\}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно.

Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда)

Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $0 < r < R$. Тогда на замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant r\}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно.

Доказательство. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$ при $|z| \leqslant r$. Числовой ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно на круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$.

Теорема

Сумма степенного ряда непрерывна на круге сходимости.

Теорема

Сумма степенного ряда непрерывна на круге сходимости.

Доказательство следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами, примененной к ряду $\sum\limits_{0}^{\infty} |a_n| r^n$ на множестве $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$, где $0 < r < R$, причем r может быть взято сколь угодно близким к R.

Теорема (Абеля)

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$. Тогда

1. если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_2, то он сходится абсолютно в точке z_1;
2. если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_1, то он расходится в точке z_2;
3. если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_2, то он равномерно сходится на замкнутом круге $\{z\colon |z| \leqslant r\}$ при любом r, $0 < r < |z_2|$.