# Математический анализ. Лекция XXXVI

## Криволинейные интегралы

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

4 апреля 2014 г.

# Признаки Дирихле и Абеля

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

## Теорема (признак Дирихле)

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$

1. функция $f$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$;
2. функция $g$ непрерывно дифференцируема на $[a, b)$ и монотонно на $[a, b)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Пусть $F$ – первообразная для $f$. Интегрируя по частям произведение $fg$ на отрезке $[a; b']$, имеем

$$\int_a^{b'} f(x)g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{b'} F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x)g'(x)\,dx.$$

Заметим, что

$$F(x)g(x)\Big|_a^{b'} = F(b')g(b') - F(a)g(a) \to -F(a)g(a).$$

Рассмотрим последний интеграл. Положив $M = \sup\limits_{[a,\infty)} |F| < +\infty$, имеем

$$\int_a^{b'} |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M \int_a^{b'} |g'(x)|\,dx = M\left|\int_a^{b'} g'(x)\,dx\right| =$$

$$= M\left|g(x)\Big|_a^{b'}\right| \to M|g(a)|.$$

Поэтому интеграл $\displaystyle\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ абсолютно сходящийся.

## Теорема (признак Абеля)

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$

1. функция $f$ непрерывна на $[a, b)$ и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится;
2. функция $g$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, b)$.

Тогда интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Покажем, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле. Сначала заметим, что функция $f$ имеет на $[a, b)$ первообразную $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, ограниченность которой следует из ее непрерывности и существования конечного предела

$$\lim_{x\to b} F(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

В силу монотонности и ограниченности функции $g$ существует $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$. Тогда функция $\tilde{g} = g - c$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, b)$ и $\tilde{g}(x) \to 0$ при $x \to b$. Поэтому интеграл

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,dx + \int_a^b cf(x)\,dx$$

сходится как сумма двух сходящихся интегралов (первый из них сходится по признаку Дирихле, а второй – по условию теоремы).

# Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая кривая

$$\Gamma = \{\vec{r}(t): \ a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t)): \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

то есть непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек.

## Определение

Пусть числовая функция $F$ определена на множестве $\Gamma$. Тогда *криволинейным интегралом первого рода* от функции $F$ по кривой $\Gamma$ называется число

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)|\, dt.$$

## Теорема

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой $\mathit{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $t = t(\tau)$ – допустимая замена параметра на $\mathit{\Gamma}$, то есть $t$: $[\alpha, \beta] \to [a; b]$, функция $t$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $t' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ ($t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ при $t' > 0$; $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$ при $t' < 0$), $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))$. Тогда

$$\mathit{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau) : \ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

С помощью замены переменного в интеграле, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))|\vec{\rho}'(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t(\tau))\right| |t'(\tau)|\, d\tau =$$

$$= (\operatorname{sign} t') \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t(\tau))\right| t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= (\operatorname{sign} t') \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}'(t)|\, dt =$$

$$= \int_{a}^{b} F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}'(t)|\, dt.$$

# Криволинейные интегралы второго рода

Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\}$$

– гладкая ориентированная кривая в трехмерном пространстве, $A = r(a)$ – ее начало, $B = r(b)$ – ее конец. Единичный вектор ее касательной

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(направленный в сторону возрастания параметра на кривой) непрерывно зависит от параметра $t$.

## Определение

Пусть в $\mathbb{R}^3$ фиксирована прямоугольная декартова система координат и на множестве $\Gamma$ задано векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$. Тогда

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}')\,dt$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* от векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кривой $\Gamma$.

Этот интеграл часто обозначают также символом $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$.

## Лемма (выражение криволинейного интеграла второго рода через криволинейный интеграл первого рода)

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Доказательство. Для обоснования достаточно в определении заменить $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ на равные им величины:

$$x' = \frac{dx}{ds}|\vec{r}'| = \cos\alpha|\vec{r}'|,$$

$$y' = \frac{dy}{ds}|\vec{r}'| = \cos\beta|\vec{r}'|,$$

$$z' = \frac{dz}{ds}|\vec{r}'| = \cos\gamma|\vec{r}'|.$$

## Лемма

Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации гладкой кривой с фиксированной ориентацией.

Доказательство такое же, как для криволинейного интеграла первого рода. Следует лишь учесть дополнительное требование $t'(\tau) > 0$ на допустимую замену параметра $t = t(\tau)$, означающее сохранение ориентации кривой при переходе к ее параметрическому заданию с помощью параметра $\tau$.

## Лемма

При изменении ориентации кривой $\Gamma$ криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

Доказательство. Это утверждение является простым следствием равенства

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$