Математический анализ. Лекция XXI

Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

26 ноября 2013 г.

Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Пусть задано $a \geqslant 0$. По принципу Архимеда $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geqslant a$. Найдем $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Пусть задано $a \geqslant 0$. По принципу Архимеда $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geqslant a$. Найдем $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$. Разобьем полуинтервал $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ на десять равных полуинтервалов и обозначим через I_1 тот из них, который содержит a:

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right) \ni a.$$

Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Пусть задано $a \geqslant 0$. По принципу Архимеда $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geqslant a$. Найдем $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$. Разобьем полуинтервал $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ на десять равных полуинтервалов и обозначим через I_1 тот из них, который содержит a:

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right) \ni a.$$

Разобьем I_1 на 10 равных полуинтервалов и обозначим через I_2 тот из них, который содержит a:

$$I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100}\right) \ni a.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$,

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \qquad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a \in I_n.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$,

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \qquad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; a \in I_n.$$

При этом $\underline{a_n}$ называется *нижним*, а $\overline{a_n}$ *верхним n-значным десятичным приближением* числа a.

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$,

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \qquad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a \in I_n.$$

При этом $\underline{a_n}$ называется *нижним*, а $\overline{a_n}$ *верхним* n*-значным десятичным приближением* числа a.

Мы установили соответствие

$$a \rightarrow \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$,

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \qquad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; a \in I_n.$$

При этом $\underline{a_n}$ называется *нижним*, а $\overline{a_n}$ *верхним n-значным десятичным приближением* числа a.

Мы установили соответствие

$$a \to \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}.$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через Ω.

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$,

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \qquad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a \in I_n.$$

При этом $\underline{a_n}$ называется *нижним*, а $\overline{a_n}$ *верхним n-значным десятичным приближением* числа a.

Мы установили соответствие

$$a \rightarrow \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}.$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через Ω.
Очевидно, что соответствие $a \rightarrow \{I_n\}$ является взаимно однозначным соответствием

$$\{a \in \mathbb{R} : \ a \geqslant 0\} \leftrightarrow \Omega.$$

Определение

Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью*.

Определение

Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью*.

Рассмотрим соответствие:

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad \{I_n\} \in \Omega,$$

если $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \dfrac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Определение

Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью*.

Рассмотрим соответствие:

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad \{I_n\} \in \Omega,$$

если $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \dfrac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Каждому действительному числу $a \geqslant 0$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

по правилу

$$a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

Определение

Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью*.

Рассмотрим соответствие:

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad \{I_n\} \in \Omega,$$

если $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Каждому действительному числу $a \geqslant 0$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

по правилу

$$a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

Заметим, что при этом каждой конечной десятичной дроби a поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь, получающаяся из данной конечной приписыванием справа нулей.

Изучим подробнее соответствие $a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$.

Изучим подробнее соответствие $a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ правых концов системы вложенных десятичных полуинтервалов назовем *застойной*, если

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\ \overline{a_{n_0}} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \ldots$$

Изучим подробнее соответствие $a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ правых концов системы вложенных десятичных полуинтервалов назовем *застойной*, если

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \overline{a_{n_0}} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \ldots$$

Лемма

Система вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ имеет общую точку (то есть принадлежит Ω) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной.

Доказательство. Пусть $a \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.

Доказательство. Пусть $a \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.
Пусть теперь последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Рассмотрим систему вложенных отрезков $\{\overline{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$.

Доказательство. Пусть $a \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.
Пусть теперь последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Рассмотрим систему вложенных отрезков $\{\overline{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$. По теореме о вложенных отрезках $\exists\, a \in \overline{I}_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом $a \leqslant \overline{a_n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Если $\overline{a_{n_0}} = a$ при некотором n_0, то $\{\overline{a_n}\}$ — застойная последовательность. Следовательно, $a < \overline{a_n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, то есть $a \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.
Лемма доказана.

Определение

Назовем бесконечную десятичную дробь *недопустимой*, если она имеет вид $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n9999\ldots$. Остальные бесконечные десятичные дроби будем называть допустимыми.

Определение

Назовем бесконечную десятичную дробь *недопустимой*, если она имеет вид $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 9999\ldots$. Остальные бесконечные десятичные дроби будем называть допустимыми.

Лемма

Соответствие

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad \{I_n\} \in \Omega,$$

является взаимно однозначным соответствием между множеством Ω и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:

$$\Omega \leftrightarrow \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}$$

Доказательство. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По предыдущей лемме последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной.

Доказательство. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По предыдущей лемме последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая $\{I_n\}$, является недопустимой. Это означает, что при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для всех $n \geqslant n_0$ полуинтервал I_{n+1} является крайним правым из десяти полуинтервалов, на которые разбивается I_n. Но тогда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ застойная, что противоречит предположению. Таким образом,

$$\Omega \to \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}.$$

Доказательство. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По предыдущей лемме последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая $\{I_n\}$, является недопустимой. Это означает, что при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для всех $n \geqslant n_0$ полуинтервал I_{n+1} является крайним правым из десяти полуинтервалов, на которые разбивается I_n. Но тогда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ застойная, что противоречит предположению. Таким образом,

$$\Omega \to \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}.$$

Покажем, что это соответствие взаимно однозначное. В самом деле, различным $\{I_n\}$ и $\{I'_n\}$ отвечают, очевидно, различные допустимые бесконечные десятичные дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \quad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}.$$

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой

$$\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n, \quad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}.$$

Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки числа $\underline{a_n}$, начиная с некоторого n_0, были бы равны 9, что противоречит допустимости нашей бесконечной десятичной дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\dots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой

$$\underline{a_n} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n, \quad \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}.$$

Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки числа $\underline{a_n}$, начиная с некоторого n_0, были бы равны 9, что противоречит допустимости нашей бесконечной десятичной дроби. Следовательно, $\{I_n\} \in \Omega$ по предыдущей лемме. Очевидно, что построенной последовательности $\{I_n\}$ соответствует именно наша допустимая бесконечная десятичная дробь.
Лемма доказана.

Теперь очевидна справедливость следующей теоремы.

Теорема

Отображение

$$a \to \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

является взаимно однозначным соответствием между множеством всех неотрицательных чисел и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:

$$\{a : \ a \in \mathbb{R}, \ a \geqslant 0\} \leftrightarrow \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}$$

Распространим отображение это на множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, доопределив его для отрицательных чисел $-a < 0$ соответствием

$$-a \to -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots,$$

если $a \leftrightarrow \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots$.

Распространим отображение это на множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, доопределив его для отрицательных чисел $-a < 0$ соответствием

$$-a \to -\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots,$$

если $a \leftrightarrow \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$.
При этом

$$\underline{(-a)_n} = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - \frac{1}{10^n},$$

$$\overline{(-a)}_n = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

называются соответственно *нижним и верхним n-значным приближением числа* $-a$.

Отображение, доопределенное таким образом, является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Построенное взаимно однозначное соответствие дает возможность записывать действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей вида

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

Отображение, доопределенное таким образом, является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Построенное взаимно однозначное соответствие дает возможность записывать действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей вида

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

Это соответствие позволяет также перенести операции сложения и умножения и отношение порядка на множество всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей.