# Математический анализ. Лекция II

## Счетные и несчетные множества

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

4 сентября 2013 г.

## Теорема (принцип Архимеда)

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; \exists\, n \in \mathbb{N}: \; n > a.$$

## Теорема (принцип Архимеда)

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \;\; n > a.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; \exists\, a \in \mathbb{R} : \;\; n \leqslant a.$$

Следовательно, $a$ ограничивает сверху множество $\mathbb{N}$. Но тогда существует конечная вехняя грань множества натуральных чисел:

$$\exists\, b \in \mathbb{R} : \;\; b = \sup \mathbb{N}.$$

## Теорема (принцип Архимеда)

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \; n > a.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; \exists\, a \in \mathbb{R} : \; n \leqslant a.$$

Следовательно, $a$ ограничивает сверху множество $\mathbb{N}$. Но тогда существует конечная вехняя грань множества натуральных чисел:

$$\exists\, b \in \mathbb{R} : \; b = \sup \mathbb{N}.$$

По определению верхней грани для числа $b' = b - 1$

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : \; n > b - 1.$$

Но тогда $n + 1 > b$ и $(n + 1) \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что $b = \sup \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Изучим связь между следующими четырьмя утверждениями:

## Принцип Дедекинда

Пусть $A$, $B$ – непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что $\forall\, a \in A,\ b \in B \ \to\ a \leqslant b$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, a \in A,\ b \in B \ \to\ a \leqslant c \leqslant b$.

## Принцип верхней грани

Всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань.

## Принцип Кантора

Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

## Принцип Архимеда

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \ \to\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ n > a.$$

Предположим, что имеют место все аксиомы множества действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности. Тогда справедливы следующие утверждения.

Предположим, что имеют место все аксиомы множества действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности. Тогда справедливы следующие утверждения.

## Теорема

- {Принцип Дедекинда} $\Rightarrow$ {Принцип верхней грани}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Кантора}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Архимеда}
- {Принцип Кантора}$\cup${Принцип Архимеда} $\Rightarrow$ {Принцип Дедекинда}

Предположим, что имеют место все аксиомы множества действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности. Тогда справедливы следующие утверждения.

### Теорема

- {Принцип Дедекинда} $\Rightarrow$ {Принцип верхней грани}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Кантора}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Архимеда}
- {Принцип Кантора}$\cup${Принцип Архимеда} $\Rightarrow$ {Принцип Дедекинда}

### Упражнение

Докажите эту теорему.

Предположим, что имеют место все аксиомы множества действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности. Тогда справедливы следующие утверждения.

## Теорема

- {Принцип Дедекинда} $\Rightarrow$ {Принцип верхней грани}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Кантора}
- {Принцип верхней грани} $\Rightarrow$ {Принцип Архимеда}
- {Принцип Кантора}$\cup${Принцип Архимеда} $\Rightarrow$ {Принцип Дедекинда}

## Упражнение

Докажите эту теорему.

Из этой теоремы следует, что в качестве аксиомы непрерывности можно было взять любое из утверждений:

1. {Принцип Дедекинда}
2. {Принцип верхней грани}
3. {Принцип Кантора}$\cup${Принцип Архимеда}

**Теорема (принцип математической индукции)**

Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что

- $1 \in A$;
- $x \in A \;\Rightarrow\; (x+1) \in A$.

Тогда $A = \mathbb{N}$.

## Теорема (принцип математической индукции)

Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что

- $1 \in A$;
- $x \in A \;\Rightarrow\; (x+1) \in A$.

Тогда $A = \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$1 \in A \;\Rightarrow\; 2 = (1+1) \in A;$$

$$2 \in A \;\Rightarrow\; 3 = (2+1) \in A;$$

$$3 \in A \;\Rightarrow\; 4 = (3+1) \in A;$$

$$\dots$$

Следовательно, $\mathbb{N} \subset A$, но $A \subset \mathbb{N}$. Значит, $A = \mathbb{N}$.

## Определение

Будем говорить, что *между двумя множествами* $X$ *и* $Y$ *установлено взаимно однозначное соответствие*, и писать $X \leftrightarrow Y$, если

- каждому $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;
- если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;
- $\forall\, y \in Y \ \to \ \exists\, x \in X : \ x \to y$.

### Определение

Будем говорить, что *между двумя множествами* $X$ *и* $Y$ *установлено взаимно однозначное соответствие*, и писать $X \leftrightarrow Y$, если

- каждому $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;
- если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;
- $\forall\, y \in Y \ \to \ \exists\, x \in X : \ x \to y$.

### Определение

Два множества $X$ и $Y$ называются *эквивалентными* (пишут $X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

## Упражнение

Докажите, что

- $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \sim \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

### Упражнение

Докажите, что

- $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \sim \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

### Определение

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

## Упражнение

Докажите, что

- $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \sim \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

## Определение

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

## Упражнение

Докажите, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

**Теорема**

Множество рациональных чисел счетно.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0/1 | 1/1 | −1/1 | 2/1 | −2/1 | 3/1 | −3/1 | ... |
| 2 | 0/2 | 1/2 | −1/2 | 2/2 | −2/2 | 3/2 | −3/2 | ... |
| 3 | 0/3 | 1/3 | −1/3 | 2/3 | −2/3 | 3/3 | −3/3 | ... |
| 4 | 0/4 | 1/4 | −1/4 | 2/4 | −2/4 | 3/4 | −3/4 | ... |
| 5 | 0/5 | 1/5 | −1/5 | 2/5 | −2/5 | 3/5 | −3/5 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| 2 | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| 3 | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| 4 | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| 5 | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла “змейкой” нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $-2$ | $3$ | $-3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0/1$ | $1/1$ | $-1/1$ | $2/1$ | $-2/1$ | $3/1$ | $-3/1$ | $\cdots$ |
| $2$ | $0/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $2/2$ | $-2/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | $\cdots$ |
| $3$ | $0/3$ | $1/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $-2/3$ | $3/3$ | $-3/3$ | $\cdots$ |
| $4$ | $0/4$ | $1/4$ | $-1/4$ | $2/4$ | $-2/4$ | $3/4$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
| $5$ | $0/5$ | $1/5$ | $-1/5$ | $2/5$ | $-2/5$ | $3/5$ | $-3/5$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались.

## Теорема

Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Составим бесконечную снизу и справа таблицу, содержащую все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0/1 | 1/1 | −1/1 | 2/1 | −2/1 | 3/1 | −3/1 | $\cdots$ |
| 2 | 0/2 | 1/2 | −1/2 | 2/2 | −2/2 | 3/2 | −3/2 | $\cdots$ |
| 3 | 0/3 | 1/3 | −1/3 | 2/3 | −2/3 | 3/3 | −3/3 | $\cdots$ |
| 4 | 0/4 | 1/4 | −1/4 | 2/4 | −2/4 | 3/4 | −3/4 | $\cdots$ |
| 5 | 0/5 | 1/5 | −1/5 | 2/5 | −2/5 | 3/5 | −3/5 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла "змейкой" нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались. Очевидно, таким способом мы занумеруем все рациональные числа всеми натуральными числами, что и требовалось показать.

## Упражнение

Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

**Упражнение**

Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

**Теорема Кантора**

Множество всех точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

## Упражнение

Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

## Теорема Кантора

Множество всех точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0, 1]$ можно занумеровать: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\ldots$ Поделим отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них (любой, если таких несколько), в котором нет точки $x_1$. Поделим $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, в котором нет точки $x_2$. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$.

## Упражнение

Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

## Теорема Кантора

Множество всех точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0, 1]$ можно занумеровать: $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... Поделим отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них (любой, если таких несколько), в котором нет точки $x_1$. Поделим $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, в котором нет точки $x_2$. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$.
По теореме о вложенных отрезках существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка $c$ не совпадает ни с одной из занумерованных точек $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., так как если $= x_k$, то не содержится в отрезке $[a_k, b_k]$.
Получили противоречие. Теорема доказана.