Математический анализ. Лекция XVI

Выпуклость и точки перегиба

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

30 октября 2013 г.

Пусть функция f определена на $(a; b)$. Для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a; b)$ построим хорду графика функции f, соединяющую точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Ее уравнение

$$y = \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta), \qquad x \in [\alpha, \beta].$$

Пусть функция f определена на $(a; b)$. Для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a; b)$ построим хорду графика функции f, соединяющую точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Ее уравнение

$$y = \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta), \qquad x \in [\alpha, \beta].$$

Определение

Функция f называется *выпуклой вверхна* $(a; b)$, если для любых $\alpha, \beta:\ a < \alpha < \beta < b \ \rightarrow\ f(x) \geqslant \ell_{\alpha,\beta}(x)$ при $x \in (\alpha, \beta)$. При этом интервал $(a; b)$ называется *интервалом выпуклости вверх* функции f.

Если же вместо нестрогого неравенства в последнем определении можно написать строгое, то функция f называется *строго выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$.

Если же вместо нестрогого неравенства в последнем определении можно написать строгое, то функция f называется *строго выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$.
Аналогично определяется выпуклая вниз функция.

Если же вместо нестрогого неравенства в последнем определении можно написать строгое, то функция f называется *строго выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$.
Аналогично определяется выпуклая вниз функция.

Условие выпуклости вверх функции можно записать в виде

$$f(x) - \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\alpha)) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\beta)) \geqslant 0$$

Если же вместо нестрогого неравенства в последнем определении можно написать строгое, то функция f называется *строго выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$.
Аналогично определяется выпуклая вниз функция.

Условие выпуклости вверх функции можно записать в виде

$$f(x) - \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\alpha)) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\beta)) \geqslant 0$$

и в виде

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geqslant \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

Последнее неравенство является соотношением между угловыми коэффициентами двух различных хорд с концами в точке $(x, f(x))$.

Упражнение

Докажите, что функция непрерывна на интервале выпуклости вверх.

Упражнение

Докажите, что функция непрерывна на интервале выпуклости вверх.

Упражнение

Докажите, что функция в каждой точке на интервале выпуклости вверх имеет обе односторонние производные. При этом каждая из односторонних производных монотонна.

Упражнение

Докажите, что функция непрерывна на интервале выпуклости вверх.

Упражнение

Докажите, что функция в каждой точке на интервале выпуклости вверх имеет обе односторонние производные. При этом каждая из односторонних производных монотонна.

Упражнение

Докажите, что функция имеет производную в каждой точке интервала выпуклости вверх за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек.

Теорема (о расположении графика функции относительно касательной)

1. Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ лежит строго выше касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.
2. Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ переходит через касательную, то есть при $x < x_0$ и при $x > x_0$ $(x \in \mathring{U}(x_0))$ лежит строго по разные стороны от касательной.

Теорема (о расположении графика функции относительно касательной)

1. Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ лежит строго выше касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.
2. Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ переходит через касательную, то есть при $x < x_0$ и при $x > x_0$ $(x \in \mathring{U}(x_0))$ лежит строго по разные стороны от касательной.

Доказательство. Утверждение 1 следует из формулы Тейлора

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left(\frac{f''(x_0)}{2!} + \varepsilon(x - x_0)\right)(x - x_0)^2,$$

Теорема (о расположении графика функции относительно касательной)

1. Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ лежит строго выше касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.
2. Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ переходит через касательную, то есть при $x < x_0$ и при $x > x_0$ $(x \in \mathring{U}(x_0))$ лежит строго по разные стороны от касательной.

Доказательство. Утверждение 1 следует из формулы Тейлора

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left(\frac{f''(x_0)}{2!} + \varepsilon(x - x_0)\right)(x - x_0)^2,$$

а утверждение 2 – из формулы Тейлора

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left(\frac{f'''(x_0)}{3!} + \varepsilon(x - x_0)\right)(x - x_0)^3,$$

написанных для $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

Теорема (условия выпуклости функций)

Пусть функция f имеет вторую производную f'' на $(a; b)$. Тогда

1. условие $f'' \leqslant 0$ на $(a; b)$ необходимо и достаточно для выпуклости вверх функции f на $(a; b)$;
2. если $f'' < 0$ на $(a; b)$, то функция f строго выпукла вверх на $(a; b)$.

Теорема (условия выпуклости функций)

Пусть функция f имеет вторую производную f'' на $(a; b)$. Тогда

1. условие $f'' \leqslant 0$ на $(a; b)$ необходимо и достаточно для выпуклости вверх функции f на $(a; b)$;
2. если $f'' < 0$ на $(a; b)$, то функция f строго выпукла вверх на $(a; b)$.

Доказательство. *Достаточность.* При $a < \alpha < x < \beta < b$ имеем, используя формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\beta - x)f'(c)(x-\alpha) + (x-\alpha)f'(d)(x-\beta)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)(\beta - x)f''(e)(c-d)}{\beta - \alpha} \geqslant 0,$$

где $a < \alpha < c < e < d < \beta < b$.

Теорема (условия выпуклости функций)

Пусть функция f имеет вторую производную f'' на $(a; b)$. Тогда

1. условие $f'' \leqslant 0$ на $(a; b)$ необходимо и достаточно для выпуклости вверх функции f на $(a; b)$;
2. если $f'' < 0$ на $(a; b)$, то функция f строго выпукла вверх на $(a; b)$.

Доказательство. *Достаточность.* При $a < \alpha < x < \beta < b$ имеем, используя формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - \ell_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\beta - x)f'(c)(x-\alpha) + (x-\alpha)f'(d)(x-\beta)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)(\beta - x)f''(e)(c-d)}{\beta-\alpha} \geqslant 0,$$

где $a < \alpha < c < e < d < \beta < b$.
Необходимость следует из предыдущей теоремы.

Определение

Точка x_0 называется *точкой перегиба функции* f, а точка $(x_0, f(x_0))$ – *точкой перегиба графика* функции f, если

1. существует производная $f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$;
2. точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Определение

Точка x_0 называется *точкой перегиба функции* f, а точка $(x_0, f(x_0))$ – *точкой перегиба графика* функции f, если

1. существует производная $f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$;
2. точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Теорема (необходимые условия точки перегиба)

Пусть x_0 – точка перегиба функции f и f'' непрерывна в точке x_0. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Определение

Точка x_0 называется *точкой перегиба функции* f, а точка $(x_0, f(x_0))$ – *точкой перегиба графика* функции f, если

1. существует производная $f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$;
2. точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Теорема (необходимые условия точки перегиба)

Пусть x_0 – точка перегиба функции f и f'' непрерывна в точке x_0. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что $f''(x_0) \neq 0$ и для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда $f'' > 0$ на некоторой окрестности $U(x_0)$. По предыдущей теореме точка x_0 находится внутри интервала $U(x_0)$ строгой выпуклости вниз и не может быть точкой перегиба.

Теорема (достаточные условия точки перегиба)

Пусть существует $f'(x_0)$, а f'' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

Теорема (достаточные условия точки перегиба)

Пусть существует $f'(x_0)$, а f'' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

Доказательство сводится к проверке определения точки перегиба с помощью теоремы о достаточных условиях строгой выпуклости функции.

Следствие

Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.