

Планиметрия

Борис Трушин

Всем привет! В этом файле вы найдете более двадцати задач по планиметрии, большинство из которых – из реальных вариантов ЕГЭ прошлых лет.

К каждой задаче есть ответ и подробный видеоразбор, который доступен по ссылке под условием.

Если вам покажется, что этого набора задач недостаточно, то посмотрите [соответствующий плейлист](#) на YouTube-канале, или приобретите мой [мини-курс по планиметрии](#).

Кроме того, сейчас в онлайн-школе Фоксфорд идёт мой [интенсивный курс по подготовке к ЕГЭ](#).

Перед вами версия файла от 27 мая 2023 года. Актуальную версию всегда можно найти по ссылке trushinbv.ru/book_plan.

Задачи из реальных вариантов ЕГЭ

Задача 1. (ЕГЭ-2023/2022/2021/2020/2019/2018/2017/2016/2015/2014. Демоверсия; ЕГЭ-2019. Досрочная волна, резервный день)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABK , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Ответ [Решение](#)

Задача 2. (ЕГЭ-2023. Досрочная волна, резервный день)

Окружность касается одной из сторон прямого угла с вершиной D в точке E и пересекает вторую сторону в точках A и B (точка A лежит между B и D). В окружности проведён диаметр AC .

- а) Докажите, что отрезок BC вдвое больше отрезка DE .
б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC , если $AD = 4$ и $AB = 5$.

Ответ Решение

Задача 3. (ЕГЭ-2022. Досрочная волна, резервный день)

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AE$.
Отрезок BE пересекает AC в точке N , а отрезок AD в точке M .

- а) Докажите, что точки C, D, M, N лежат на одной окружности.
б) Точка O – центр окружности, описанной около треугольника CMD .
Найдите радиус этой окружности, если $AO = 12, AB = 4$.

Ответ Решение

Задача 4. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

В параллелограмме $ABCD$, угол CAD в два раза меньше угла BAC ,
биссектриса угла BAC пересекает BC в точке L . На продолжении сто-
роны CD за точку D отмечена точка E так, что $AE = CE$.

- а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
б) Найти длину отрезка LE , если $AC = 9$, а $\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{1}{3}$.

Ответ Решение

Задача 5. (ЕГЭ-2022. Основная волна)

В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена точка M так, что
 $AM = MC$.

- а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AMD
лежит на диагонали AC .
б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 5, BC = 10$, а угол ADC
равен 60° .

Ответ Решение

Задача 6. (ЕГЭ-2021. Досрочная волна)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в
точке H . Отрезок AP – диаметр окружности, описанной около треуголь-
ника ABC .

- а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треуголь-
ника ABC , в точке M . Найдите длину отрезка MC_1 , если расстояние от
центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120^\circ$.

Ответ Решение

Задача 7. (ЕГЭ-2021. Основная волна)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M , что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN , если $AC = 4$, $\sin \angle BAD = \frac{8}{17}$.

Ответ Решение

Задача 8. (ЕГЭ-2020. Досрочная волна)

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

Ответ Решение

Задача 9. (ЕГЭ-2020. Основная волна, резервный день)

Точка M – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$.

а) Докажите, что $S_{ABM} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

б) На стороне CD отмечена точка K такая, что $S_{BKC} = \frac{S_{AKD}}{2}$, причем $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до AB .

Ответ Решение

Задача 10. (ЕГЭ-2019. Досрочная волна)

Точки M и N – середины соответственно боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Окружность проходящая через точки B и C пересекает отрезки MB и CN в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что M , P , Q и N лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка QN , если $BC = 4,5$, $AD = 21,5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD – прямой.

Ответ Решение

Задача 11. (ЕГЭ-2019. Основная волна)

Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB

вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3.

Ответ Решение

Задача 12. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна)

В треугольнике ABC угол B тупой, H – точка пересечения высот, угол AHC равен 60° .

а) Докажите, что угол ABC равен 120° .

б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

Ответ Решение

Задача 13. (ЕГЭ-2018. Досрочная волна. Резервный день)

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны длины сторон и одной диагонали: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите длину диагонали BD .

Ответ Решение

Задача 14. (ЕГЭ-2018. Основная волна)

Окружность высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные отрезки.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Пусть окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 23$, $KL = 4$ и $LB = 2$. Найдите высоту трапеции.

Ответ Решение

Задача 15. (ЕГЭ-2018. Основная волна, резервный день)

Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $\angle AOE = 90^\circ$.

б) Найдите $BO : OD$.

Ответ Решение

Задача 16. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна)

В треугольнике ABC точки A_1B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

Ответ Решение

Задача 17. (ЕГЭ-2017. Досрочная волна, резервный день)

Точка M – середина гипотенузы AB треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.

Ответ Решение

Задача 18. (ЕГЭ-2017. Основная волна)

Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O .

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO , если сторона квадрата равна 1.

Ответ Решение

Задача 19. (ЕГЭ-2016. Основная волна)

В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30° .

Ответ Решение

Задача 20. (ЕГЭ-2016. Основная волна)

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK к KE , если $\angle ECD = 15^\circ$.

Ответ Решение

Задачи не из ЕГЭ

Задача 21. На сторонах AD и CD ромба $ABCD$ отмечены точки J , I и L , K соответственно. Причем так, что

$$AI : IJ : JD = CL : LK : KD = 3 : 5 : 4.$$

- а) Докажите, что прямые BL , BK , BJ и BI делят меньшую диагональ AC на пять равных отрезков.
б) Найдите площадь треугольника AJM , где M – точка пересечения прямых KA и BJ если дополнительно известно, что площадь ромба равна 72.

Ответ Решение

Задача 22. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD , касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются диагонали AC в точках P и Q соответственно.

- а) Докажите, что $MPNQ$ – прямоугольник.
б) Найдите площадь этого прямоугольника, если известно, что

$$AD - AB = 4,$$

а угол между диагоналями параллелограмма равен 30° .

Ответ Решение

ОТВЕТЫ

1. б) 3,2. 2. б) 6. 3. б) $8\sqrt{2}$. 4. б) $\frac{39}{8}$. 5. б) $\frac{5}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$.
6. б) $4\sqrt{3}$. 7. б) $\frac{120}{17}$. 8. б) $\frac{5}{4}$. 9. б) 7,5. 10. б) 7,28.
11. б) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. 12. б) $\frac{13}{\sqrt{3}}$. 13. б) $\frac{55}{7}$. 14. б) 20. 15. б) 3. 16. б) 1.
17. б) $\frac{5}{4}$. 18. б) 1. 19. б) $\frac{3}{4}$. 20. б) 2. 21. б) $\frac{48}{11}$. 22. б) 4.