Фоксфорд

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие для школьников
от преподавателей Фоксфорда

Содержание

Автор: **Борис Трушин**

Директор по учебной работе онлайн-школы Фоксфорд,
кандидат физико-математических наук,
учитель высшей категории, член жюри ВсОШ

Что нужно знать о ЕГЭ по математике

Структура профильного ЕГЭ по математике

ЕГЭ по математике фактически состоит из двух частей.

Тестовая часть. Задания 1–12

- Задания с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби.
- За каждое задание можно получить один первичный балл.
- Максимальный первичный балл за выполнение тестовой части – 12, что в 2018 году соответствовало 62 тестовым баллам (из 100 возможных).
- Выполнение заданий 1–8 свидетельствует о «наличии общематематических умений, необходимых человеку в современном обществе» (по крайней мере, так заявляют составители ЕГЭ). Эти задания фактически проверяют базовые знания, простейшие вычислительные навыки, умение анализировать текстовую информацию, графики и таблицы, а также способность использовать простейшие знания из теории вероятностей и основные факты из геометрии.
- Задания 9–12 считаются заданиями повышенной сложности, и, обычно, требуют большего времени для выполнения.

Содержательная часть. Задания 13–19

- Задания с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

- Задания проверяют освоения математики на профильном уровне и предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов. Это означает, что ученики средних общеобразовательных школ не обязаны уметь решать все эти задания. Эти задания проверяют знания на том уровне, на котором ранее это делали вступительные экзамены в сильные технические вузы. При этом последние три задания предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

- Возможны различные способы и записи развернутого решения. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном же (методы, форма записи и т.п.) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оцениваются продвижения в решении задачи, а не недочеты по сравнению с «эталонным» решением.

- При решении заданий можно использовать без доказательств математические факты, содержащиеся в школьных учебниках и учебных пособиях.

В этом пособии мы коротко рассмотрим содержание заданий экзаменационной работы и основные методы их решения.

Как происходит проверка работ

Задания 1–12 проверяются автоматически. Задания с развернутым ответом независимо проверяют два эксперта.

В случае существенного расхождения в баллах (2 или более балла), выставленных двумя экспертами в каком-либо из заданий 13-19, назначается третья проверка. При этом третий эксперт проверяет только решение этого задания. Есть такие расхождения есть хотя бы в двух из заданий 13–19, то третий эксперт проверяет решения всех заданий с развернутым ответом.

Если работа не была отправлена на третью проверку, то все разногласия в баллах трактуются в пользу ученика.

Шкала перевода первичных баллов в тестовые в 2018 году

перв.	тест.	перв.	тест.	перв.	тест.	перв.	тест.
1	5	9	45	17	76	25	92
2	9	10	50	18	78	26	94
3	14	11	56	19	80	27	96
4	18	12	62	20	82	28	98
5	23	13	68	21	84	29	99
6	27	14	70	22	86	30	100
7	33	15	72	23	88	31	100
8	39	16	74	24	90	32	100

Содержание заданий

Задание #1. Проверяемый навык – «уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни».

Простейшая текстовая задача. Для того, чтобы её решить нужно

- понимать, что такое процент;
- не запутаться, в какую сторону округлять до целого ответа.

Рассмотрим два типичных примера.

> Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 20 руб. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить в этом маршрутном такси на 150 руб., если цена проезда снизится на 10%?

> В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г сахара в день. В лагере 181 человек. Сколько килограммовых упаковок сахара понадобится на весь лагерь на 5 дней?

В первой задаче нужно просто вычислить стоимость проезда после снижения цены

$$20 - \frac{10}{100} \cdot 20 = 20 - 2 = 18,$$

и сказать, что $18 \cdot 8 = 144$, а $18 \cdot 9 = 162$. Значит, 8 поездок можно будет совершить, а 9 – уже нет. Поэтому ответ – 8. Фактически мы поделили 150 на 18 и отбросили дробную часть (округлили вниз).

Во второй задаче мы получаем, что за пять дней один участник получает 200 г сахара, а значит, одной пачки хватает на пятерых школьников. Далее, $36 \cdot 5 = 180$, а $37 \cdot 5 = 185$. Поэтому 36 пачек ещё не хватит, а 37 – хватит. Поэтому ответ – 37. Фактически мы поделили 181 на 5 и округлили вверх.

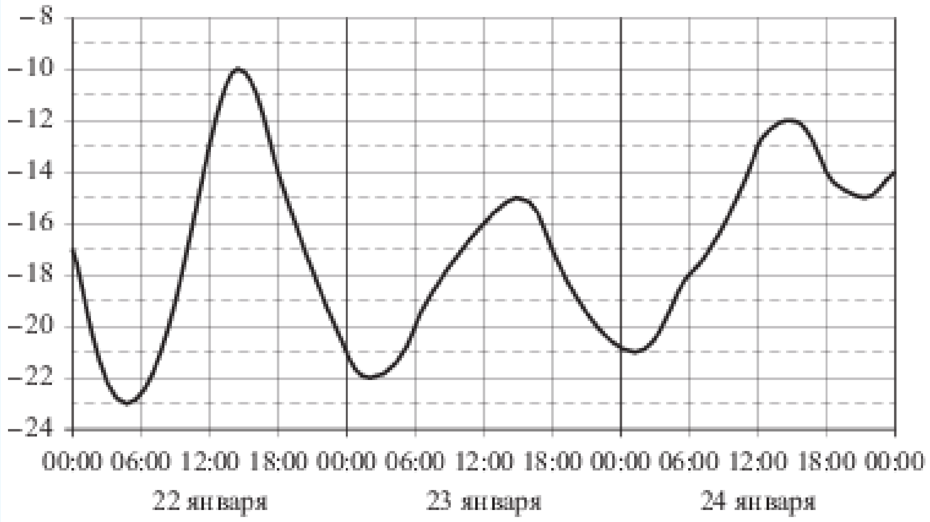
> Чтобы не сделать ошибки в задании #1 нужно внимательно прочитать условие и четко понять, что именно просят найти. Нужно понять в какую сторону требуется округлить и почему.

Задание #2. Проверяемый навык – «уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни».

Это задание проверяет, умеет ли школьник «читать» графики и диаграммы. Чаще всего в этом задании не требуется ничего вычислять. Для решения обычно достаточно внимательно посмотреть на график/диаграмму и не запутаться при ответе на вопрос.

Рассмотрим следующий пример.

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 23 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Здесь главное понять, что спрашивают не наибольшее значение температуры на всем графике, а только про 23 января. И не потерять минус перед ответом. Видно, что этот максимум лежит на пунктирной линии между «-16» и «-14». Поэтому ответ – «-15».

Задание #3. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Обычно это несложная геометрическая задача про фигуры на координатной плоскости или на клетчатой бумаге. Для решения этого задания достаточно знать:

- теорему Пифагора;
- формулы для площадей треугольника, параллелограмма и трапеции (хотя чаще всего можно обойтись формулой для площади прямоугольного треугольника);
- формулы для площади окружности;
- связь между вписанным и центральным углами, опирающимися на общую дугу;
- определения синуса, косинуса и тангенса острых углов прямоугольного треугольника.

Задание #4. Проверяемый навык – «уметь строить и исследовать простейшие математические модели».

Это задача на теорию вероятностей. Для решения этой задачи нужно знать:

- классическое определение вероятности;
- вероятность наступления одного из нескольких несовместных событий (то есть тех, которые не могут произойти одновременно) равна сумме их вероятностей;
- вероятность того, что последовательно наступят два независимых события (то есть таких, что вероятность наступления одного не зависит от того, наступило ли второе или нет) равна произведению их вероятностей.

Вероятностью случайного события A называется отношение количества n равновероятных элементарных событий, составляющих событие A, к количеству всех возможных элементарных событий N:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Задание #5. Проверяемый навык – «уметь решать уравнения и неравенства».

Сложность этого задания в том, что на этой позиции может встретиться любое уравнение (пусть и очень простое). Поэтому, для того, чтобы уверенно справиться с этим заданием нужно уметь решать:

- линейные, квадратные и простейшие кубические уравнения;
- рациональные уравнения;
- простейшие иррациональные уравнения;
- простейшие показательные и логарифмические уравнения;
- простейшие тригонометрические уравнения.

При решении этого задания нужно понимать, что от вас требуется только ответ. Если вы угадали корень и проверили, что он подходит, то можно смело писать его в бланк ответов. Обосновывать ответ вам не нужно.

Большинство таких задач можно решить методом «пристального взгляда». Рассмотрим несколько примеров.

Найдите корень уравнения $(x-1)^3 = 8$.

Сразу понятно, что $x - 1 = 2$, значит $x = 3$.

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+1} = 3$.

Так как $\sqrt{9} = 3$, то $2x + 1 = 9$, значит $x = 4$.

Найдите корень уравнения $\log_6(8-x) = \log_6 5$.

Здесь даже можно не вспоминать, что такое логарифм. Очевидно, что при $x = 3$ слева и справа получится одно и тоже.

При этом важно понимать, что такого уровня обоснований было бы недостаточно, если требовалось бы подробное решение. Но в тестовой части ЕГЭ оно не требуется, поэтому часто ответ можно просто «угадать».

Задание #6. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Это совсем простая задача по планиметрии, которая обычно решается в одно действие. Она проверяет знание какого-то факта, теоремы или формулы. Проблема в том, что на этой позиции может встретиться задача на любую тему. Поэтому, чтобы уверенно её решать нужно (пусть и на совсем базовом уровне) знать всю классическую школьную планиметрию. Но в большинстве задач достаточно знать те факты, которые мы упоминали в задании **#3**.

Задание #7. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с функциями».

Для решения этого задания у вас должны быть представления о:

- производной и её геометрическом и физическом смысле;
- касательной и её связи с производной;
- связи производной с монотонностью функции;
- первообразной, интеграле, площади под графиком и их связи через формулу Ньютона-Лейбница.

Обычно сложность с этим заданием для школьников связана с тем, что в школе очень поверхностно говорят о производных (и тем более про первообразную и интеграл), практически ничего не объясняя и не доказывая.

Важно понимать следующее.

- Значение производной в некоторой точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в точке x_0 с положительным направлением оси абсцисс.
- Пусть в некоторой точке x_0 существует производная. Тогда уравнение касательной к графику функции в этой

точке можно записать так:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

- Если $f'(x) > 0$ во всех точках некоторого интервала, то функция возрастает на нем, а если $f'(x) < 0$ во всех точках интервала, то функция на нем убывает.
- Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.
- Первообразной функции f на промежутке I называется такая функция F, что для всех $x \in I$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Если в задании дан график, то во-первых, очень важно не перепутать чей это график: самой функции, ее производной или первообразной. Во-вторых, не путайте минимум/максимум функции с точками минимума/максимума. Минимум/максимум – это «игрики», а точка минимума/максимума – «иксы».

Задание #8. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Это простая задача по стереометрии. Так же как и задание **#6**, эта задача может быть про любой факт из школьной стереометрии.

Не нужно отдельно заучивать формулы для объемов всех изучаемых тел. Достаточно понять, что все изучаемые в школе тела (кроме шара) делятся на две группы.

- Цилиндры: призмы (в частности, параллелепипеды, в том числе и прямоугольные параллелепипеды и кубы) и прямые круговые цилиндры; их объёмы равны Sh.
- Конусы: пирамиды (в том числе, тетраэдры) и прямые круговые конусы; их объёмы равны $\dfrac{1}{3}Sh$.

Где S – площадь основания, а h – высота.

Кстати, если вам сложно запомнить обе формулы – $S = 4\pi R^2$ и $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ – для площади сферы и объема шара, то достаточно помнить только одну и понять, что, также как и формулы для длины окружности и площади круга, они связаны через производную. Действительно, если взять производную «по R», то

- для круга: $S' = (\pi R^2)' = 2\pi R = \ell$;
- для шара: $V' = \left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2 = S$.

На самом деле этот факт справедлив для шара в произвольном n-мерном пространстве, но здесь мы это доказывать не будем.

Задание #9. Проверяемый навык – «уметь выполнять вычисления и преобразования».

В этом задании нужно преобразовать числовое или буквенное выражение. При этом само выражение может быть алгебраическим, иррациональным, показательным, логарифмическим или тригонометрическим. Поэтому для уверенного выполнения этого задания нужно уметь пользоваться формулами сокращенного умножения и знать основные свойства степеней, логарифмической и тригонометрических функций.

> В заданиях с числовыми выражениями не бросайтесь сразу считать. Попробуйте сначала упростить выражение. Например, с помощью формул сокращенного умножения.

Рассмотрим два примера.

> Найдите значение выражения $\dfrac{432^2 - 568^2}{1000}$.

Вычислять каждый из квадратов в отдельности довольно трудоемко, и есть высокий риск сделать арифметическую ошибку. Но если воспользоваться формулой разности квадратов, то в числителе мы получим

$$432^2 - 568^2 = (432 - 568)(432 + 568) = -136 \cdot 1000.$$

Поэтому ответ – «-136».

> Найдите значение выражения $\dfrac{1,23 \cdot 45,6}{12,3 \cdot 0,456}$.

В подобных заданиях не нужно вычислять отдельно числитель и знаменатель. Достаточно заметить, что

- числитель $= \dfrac{123}{100} \cdot \dfrac{456}{10} = \dfrac{123 \cdot 456}{1000}$;
- знаменатель $= \dfrac{123}{10} \cdot \dfrac{456}{1000} = \dfrac{123 \cdot 456}{10000}$.

Поэтому

$$\frac{1,23 \cdot 45,6}{12,3 \cdot 0,456} = \frac{123 \cdot 456}{1000} : \frac{123 \cdot 456}{10000} = \frac{123 \cdot 456}{1000} \cdot \frac{10000}{123 \cdot 456} = 10.$$

Отметим, что в таких задачах, чтобы случайно не ошибиться на порядок, полезно вначале прикинуть чему равно это выражение. Например, так:

$$\frac{1,23 \cdot 45,6}{12,3 \cdot 0,456} \approx \frac{1 \cdot 50}{12 \cdot 0,5} = \frac{50}{6} \approx 8.$$

Теперь, когда вы заранее знаете, что ответ это примерно 8, вы сразу поймете, что ошиблись, если получите 1 или 100.

> В заданиях с буквенными выражениями часто можно немного «считерить», и получить верный ответ не решая честно задание. Дело в том, что мы заранее знаем, что ответом будет число (таков формат ЕГЭ). Значит, выражение преобразуется так, что «буквы» не будут входить в ответ. А это означает, что при всех значениях «букв» ответ один и тот же. Поэтому, для того чтобы его найти, достаточно подставить любые допустимые числа вместо «букв».

Рассмотрим типичный пример.

Найдите значение выражения $\dfrac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x>0$.

Честное решение.

$$\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{5x+2\sqrt{x}}{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\frac{5x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x}=\frac{5x}{x}=5.$$

Нечестное решение. Мы знает, что ответ не зависит от x. Подставим, например, $x=1$. Получим

$$\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x}=7-2=5.$$

Задание #10. Проверяемый навык – «уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни».

Это задание выглядит как задача по физике или экономике, в которой кроме условия написали ещё и все формулы, которые нужно использовать. По сути для ее решения нужно преобразовать некоторое выражение (см. советы к заданию **#9**) и решить простейшее уравнение или неравенство (см. советы к заданию **#5**).

Рассмотрим один пример.

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 9,7$ – постоянная, $N = 300$ K – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 29100 Дж.

Для решения таких задач можно либо сначала преобразовать буквенное равенство и только потом подставлять числа, либо наоборот – подставить числа и преобразовывать уже числовое выражение.

Если пойти первым путем, то получится такое решение:

$$A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \log_2 \frac{p_2}{p_1} = \frac{A}{\alpha\nu T} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = 2^{\frac{A}{\alpha\nu T}} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \cdot 2^{\frac{A}{\alpha\nu T}}.$$

$$\frac{A}{\alpha\nu T} = \frac{29100}{9,7 \cdot 5 \cdot 300} = \frac{291}{48,5 \cdot 3} = \frac{97}{48,5} = 2.$$

$$p_2 = 1,75 \cdot 2^2 = 1,75 \cdot 4 = 7.$$

А если вторым путем, то такое:

$$A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 29100 = 9,7 \cdot 5300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,75} = 14550 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,75} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_2 \frac{p_2}{1,75} = \frac{29100}{14550} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{1,75} = 2^2 = 4 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p_2 = 4 \cdot 1,75 = 7.$$

Задание #11. Проверяемый навык – «уметь строить и исследовать простейшие математические модели».

Это не очень сложная текстовая задача на движение, на совместную работу или про сплавы/растворы. Для ее решения помогут советы по заданиям **#1** и **#5**.

Вспомним полезные соображения, которые нужно знать при решении текстовых задач.

Движение по реке. Скорость движения по течению реки равна $v+u$, а против течения она равна $v-u$, где v – скорость в стоячей воде (собственная скорость) плавательного средства, а u – скорость течения реки. Собственная скорость плота считается равной нулю.

Совместное движение вдоль прямой. Если два объекта в начальный момент времени находятся на расстоянии S и начинают двигаться навстречу друг другу с постоянными скоростями v и u, то они встретятся через время, равное $t = \dfrac{S}{u+v}$.

Если два объекта в начальный момент времени находятся на расстоянии S, и второй со скоростью u начинает догонять первого, двигающегося со скоростью $v < u$, то они встретятся через время, равное $t = \dfrac{S}{u-v}$.

При решении задач на движение принято считать (если в условии не оговорено противное), что движение на отдельных участках *равномерное* (то есть скорости пешехода, велосипеда, автомобиля, лодки, течения реки и проч. не зависят от времени). Путь S, пройденный объектом, определяется по формуле $S = vt$, где v – скорость объекта, а t – затраченное время; любое изменение скорости движущегося объекта (в том числе повороты и развороты) считается мгновенными, то есть происходит без затраты времени.

Задачи на работу. В этих задачах рассматривается производительность человеческого труда (рытье канавы, печатание рукописи, покраска забора) или производительность различных механизмов (труб, насосов и проч.). При решении таких задач используется формула $A = Pt$, где A – весь объем выполняемой работы, P – производительность труда, то есть объем работы, выполняемый в единицу времени, t – время, необходимое на выполнение всей работы.

Многие задачи на работу ничем не отличаются от задач на движение. Достаточно в условии заменить производительность на скорость, а работу – на перемещение.

Когда задача сведена к уравнению, не забывайте про совет, который был в задании **#5**: «от вас требуется только ответ, поэтому достаточно угадать корень и проверить, что он подходит». Рассмотрим следующий пример.

Моторная лодка прошла против течения реки 112 км, развернулась, и пошла обратно в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Если скорость течения реки равна u км/ч, то скорость лодки по течению равна $11+u$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $11-u$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{112}{11-u}-\frac{112}{11+u}=6.$$

Если решать это уравнение честно (привести к общему знаменателю и упростить), то получится довольно неприятное квадратное уравнение ($3u^2+112u-363=0$), при решении которого велик риск ошибки.

Давайте поступим иначе. Скорее всего ответ целый и не очень большой (так как это скорость течения реки). Значит, 112 должно делиться на два числа, одно из которых чуть меньше 11, а другое – чуть больше. Легко заметить, что 112 делится на 8 и 14. При этом

$$\frac{112}{8}-\frac{112}{14}=14-8=6.$$

Всё! Значит $u=3$.

Задание #12. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с функциями».

Это задание на исследование функции с помощью производной. Задачи бывают двух типов:

- нахождение точек максимума/минимума, то есть точек, в которых функция принимает локально самое большое/маленькое значение;
- нахождение наибольшего/наименьшего значения функции на промежутке.

Для решение задачи помогут факты, которые мы вспоминали в задании **#7**.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции, достаточно вычислить значение этой функции в концевых точках, а также во всех точках интервала $(a; b)$, в которых производная равна нулю или не существует, и из полученного набора значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Но иногда на этой позиции встречаются задания, которые можно решить без использования производной. Для их решения достаточно уметь исследовать квадратичную функцию. Рассмотрим один пример.

Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+3}$.

Выделим полный квадрат: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$. Значит, показатель степени не меньше 2, и равен 2 при $x = -1$. Поэтому
$$y = 2^{x^2+2x+3} = 2^{(x+1)^2+2} \geqslant 2^2 = 4.$$
Наименьшее значение равно 4 (и достигается при $x = -1$).

Задание #13. Проверяемый навык – «уметь решать уравнения и неравенства».

Это первая из задач, где требуется подробное решение. Задание стоит 2 балла и содержит два пункта, за каждый из которых можно получить 1 балл. В первом пункте нужно решить уравнение (чаще всего тригонометрическое, но встречаются логарифмические и иррациональные уравнения), а во втором – отобрать корни, принадлежащие некоторому промежутку.

Чтобы справиться с заданием нужно уметь решать чуть более сложные уравнения, чем те, которые были в задании **#5**.

Задание #14. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Задание по стереометрии, стоит 2 балла и содержит два пункта, за каждый из которых можно получить 1 балл. В первом пункте нужно доказать какое-то утверждение про геометрическую конструкцию, а во втором – найти какую-то величину. Например,

- объём многогранника или цилиндра;
- расстояние от точки до прямой или до плоскости;
- площадь сечения;
- угол между плоскостями;
- расстояние между прямыми или плоскостями;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между скрещивающимися прямыми.

Обсудим основные идеи, которые могут пригодиться при решении этого задания.

- Если в первом пункте нужно доказать перпендикулярность двух скрещивающихся прямых, то чаще всего это легко сделать используя теорему о трёх перпендикулярах.
- Для решения задач на нахождения объема помогут советы к заданию #8.
- Расстояние от точки до плоскости можно найти так. Выбрав удобные три точки на плоскости, найти площадь треугольника с вершинами в этих точках и объем тетраэдра с вершинами в эти и исходной точках. Искомое расстояние – это высота полученного тетраэдр. Она находится из формулы для объема: $h = \dfrac{3V}{S}$.
- Для решения задач про площадь сечения и угол между плоскостями, полезно помнить формулу $S' = S\cos\alpha$, связывающую площадь фигуры S, площадь её проекции S' и угол α между плоскостями.

Задание #15. Проверяемый навык – «уметь решать уравнения и неравенства».

Задание стоит 2 балла. На этой позиции чаще всего находится логарифмическое или показательное неравенство (но встречаются и рациональные и иррациональные).

Большинство задач либо после замены, либо после использования метода рационализации, сводятся к решению рационального неравенства, поэтому для их решения важно уметь пользоваться методом интервалов.

Задание #16. Проверяемый навык – «уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Это задание по планиметрии средней сложности, стоит 3 балла и содержит два пункта. В первом пункте, за который можно получить 1 балл, необходимо доказать какое-то утверждение про геометрическую конструкцию, а во втором, за который можно получить 2 балла, – найти какую-то величину.

Кроме тех фактов, которые мы упоминали в задании **#3**, чаще всего при решении этого задания нужны:

- связи между элементами прямоугольного треугольника;
- факты про вписанную и описанную окружности треугольника;
- факты про точки пересечения медиан, биссектрис, высот и серединных перпендикуляров;
- теорема о биссектрисе угла треугольника;
- формулы для площади треугольника, в том числе, и формула Герона;
- теоремы о касательной и секущей, о двух секущих, о пересекающихся хордах;
- теоремы синусов и косинусов.

Задание #17. Проверяемый навык – «уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни».

Это экономическая задача, которая стоит 3 балла. Такие задания бывают двух типов:

- задачи на банковские проценты (про вклады или кредиты);
- задачи на оптимизацию.

Для успешного решения задач на банковские проценты нужно хорошо понимать как работать с процентами и знать формулы для сумм арифметической и геометрической прогрессий.

При решении задач на оптимизацию помогут навыки исследования функций на экстремумы, которые мы обсуждали в задании **#12**.

Задание #18. Проверяемый навык – «уметь решать уравнения и неравенства».

Это задача (уравнение, неравенство или их система) с параметром, которая стоит 4 балла.

Обсудим два основных метода, которые помогают решить задачи с параметром. Обычно, каждую конкретную задачу можно решить несколькими способами, но чем больше методов в вашем «арсенале», тем больше шансов справиться с задачей.

Аналитический подход. Этот подход заключается в том, чтобы просто решить соответствующее уравнение или неравенство так, будто параметр известен. Для этого нужно уметь хорошо решать уравнения и неравенства (смотрите задания **#13** и **#15**). Этот метод сильно усложняется, если задача содержит модуль или неравенство, так как возникает большое количество случаев в зависимости от того, где на числовой прямой лежит параметр.

Графический подход. Этот подход заключается в том, чтобы изобразить множество точек, которые

- задает уравнение/неравенства в координатах $(x; a)$, что позволяет при каждом значении параметра явно видеть сколько и каких решений есть у уравнения/неравенства;
- задает система уравнений/неравенств в координатах $(x; y)$; в этом случае график будет «динамическим», так как множество точек будет меняться в зависимости от параметра.

Для уверенного использования этого подхода нужно уметь по формулам строить графики прямых, парабол, гипербол и окружностей, а также всевозможных областей ограниченных этими кривыми.

Задание #19. Проверяемый навык – «уметь строить и исследовать простейшие математические модели».

На этой позиции можно встретить текстовую или алгебраическую задачу высокой сложности. Задание стоит 4 балла и обычно содержит три пункта. За каждый из первых двух пунктов можно получить по 1 баллу, а за последний – 2.

Хотя для решения задачи не требуется каких-то внешкольных знаний, она сложна своей нестандартностью и необходимостью логически рассуждать для ее решения. Среди фактов, которые могут пригодиться для решения, стоит отметить следующие:

- элементы теории чисел – основная теорема арифметики, свойства делимости и признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10 и 11;
- факты про арифметическую и геометрическую прогрессию – формулы общего члена, характеристические свойства, формулы суммы первых членов;

- элементы комбинаторики – подсчёт вариантов, правила произведения и суммы.

Не смотря на то, что целиком задание решить довольно сложно, первый пункт часто бывает очень простым. Рассмотрим несколько примеров.

> С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).
> а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
> б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
> в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

Внимательно посмотрев на 2108124117 легко увидеть **2**10**8**12**4**11**7**. Получаем ответ 2847. Всё! Первый пункт решен.

В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 грамм, второй – по 200 грамм, третий – по 300 грамм, а четвертый – по 400 грамм.
а) Может ли оказаться так, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться так, что кроликов было 15 и все они получили разное количество корма?
в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?

Достаточно разделить 15 кроликов на любые две группы (например, на 5 и 10 кроликов), и первой группе дать по $100+400$, а второй – по $200 + 300$.

В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.
а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Посчитаем, сколько всего литров:

$$29 + 32 + 40 + 91 = 192.$$

Значит, если во всех бочках будет поровну, то в каждой будет $192/4 = 48$. Достаточно из бочки, в которой 91, перелить 19, 16 и 8, соответственно, в первую, вторую и третью. И в ней останется $91 - 19 - 16 - 8 = 48$.

Видно, что первые пункты в этих задачах совсем простые, да и вторые тоже не очень сложные. Не стоит упускать возможность получить на этом задании 1-2 балла, даже если у вас нет времени и сил решить его целиком.

Как готовиться к экзамену

Определите цель. Для начала нужно понять на какой уровень вы хотите выйти, и не забывать, что кроме математики нужно ещё сдавать несколько предметов. Если вам достаточно 70-80 баллов, и есть тема, которая провисает, скорее всего не стоит тратить на неё время.

Прокачивайте все необходимые предметы параллельно. Иногда бывает так, что абитуриент много сил вкладывает в подготовку по математике доводит её до совершенства и напишите ЕГЭ на 100 баллов, но при этом физику, например, пишет всего на 50. В итоге было бы эффективнее потратить больше усилий на физику и довести её до 70 баллов. Прокачать с 50 до 70 проще, чем с 90 до 100.

С чего начать. Подготовка к ЕГЭ делится на два этапа: обучение и проверка своего уровня. Во время обучения стоит заново просмотреть учебник, повторить непонятные или сложные темы, вспомнить основные факты. Для отработки темы начинайте с простых задач. Только когда хорошо усвоите материал, переходите к задачам из ЕГЭ.

Отработайте тестовую часть. Если вы рассчитываете сдать экзамен на 90+ баллов, то вам нужно научиться чисто решать тестовую часть за 20-30 минут. Засекайте время по таймеру и упражняйтесь с тренировочными вариантами. В них можно самостоятельно проверить правильность ответов, а также понять свой уровень подготовки.

Сильные школьники порой спотыкаются на первых 12 задачах, потому что привыкли решать что-то более содержательное. Обидно, когда такие ребята теряют баллы, время и силы на простых задачах.

Если же ваша цель 70-75 баллов, то это всего 14-16 первичных баллов. Можно тратить даже по 10-15 минут на самые простые задачи, но доводить их до состояния, когда вы на 100% уверены в своем ответе. Перепроверяйте себя, решайте разными способами. Вся тестовая часть, плюс еще пара задач и это уже 70-75 баллов!

Не бойтесь сложных заданий. Некоторые школьные учителя говорят, что последние задания слишком сложные, и совсем не хотят обсуждать их со школьниками. На самом деле это не совсем так. Все задачи из ЕГЭ решаемы при должном старании.

Дело в том, что домашние, самостоятельные и контрольные работы по математике приучили вас к тому, что на задачу нужно тратить не более, чем 5—10 минут. Так у школьников появляется ощущение, что если не можешь решить за 10 минут, то и не получится совсем. Однако, в реальной математике есть сложные математические проблемы, которые решаются неделями, месяцами и даже годами. И это нормально.

Если вы, например, тренируетесь решать задание **#19**, то нормально, если в первый раз вы потратите на него неделю. Подумали над ним час, если нет никаких идей, вернитесь к нему через день, через два. Снова подумайте над решением этого задания, рассматривайте разные способы. Не отчаивайтесь, если не удалось решить задачу и со второй-третьей попытки – над ней можно думать по часу в течение недели. Если сначала вы будете суммарно тратить на задачу 5-10 часов – прекрасно! Продолжайте тренироваться, продолжайте решать. Если у вас есть достаточно времени и желания, в какой-то момент вы выйдете на стабильное решение таких заданий в течение часа. Этого достаточно, чтобы «затащить» их на ЕГЭ.

> Для того, чтобы перестать бояться сложных задач, нужно просто решать их как можно больше.

Таймер. Необходимо узнать, сколько времени вам потребуется на решение всех задач. Для этого возьмите вариант прошлого года, поставьте таймер на 4 часа и все это время решайте, ни на что не отвлекаясь. В итоге вы поймете, сколько успеете сделать за 4 часа экзамена.

> Для успешной сдачи ЕГЭ мало уметь решать любую задачу, нужно в стрессовых условиях экзамена успевать отрешать и оформить всё за 4 часа.

Пробные экзамены. Их проводят на уровне школы или города. В крупных городах есть центры, где за небольшую плату тоже можно пройти пробный ЕГЭ. Однако, нужно учитывать, что «пробник» может сильно отличаться от реального экзамена. Но в любом случае, пробный ЕГЭ даст хорошее представление о том, как устроены задания и сама процедура экзамена.