

Математический анализ. Лекция IX

Показательная функция

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

1 октября 2013 г.

Определение

Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f .

Определение

Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f .

В силу этого определения

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y.$$

Непрерывные функции

Обратные функции

Определение

Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f .

В силу этого определения

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y.$$

Упражнение

Пусть функция $f : X \rightarrow Y$, $Y = f(X)$ строго монотонна на множестве X . Тогда обратная функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$ строго монотонна на множестве Y .

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема

Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a; b]$, строго возрастает и непрерывна.

Тогда обратная функция задана на отрезке $[A; B] = [f(a); f(b)]$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема

Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a; b]$, строго возрастает и непрерывна.

Тогда обратная функция задана на отрезке $[A; B] = [f(a); f(b)]$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Доказательство. Найдем область значений Y функции f . Поскольку $\forall x \in [a; b] \rightarrow A \leq f(x) \leq B$, то $Y \subset [A; B]$. С другой стороны, по теореме Коши

$$\forall C \in [A; B] \rightarrow \exists c \in [a; b] : f(c) = C,$$

так что $[A; B] \subset Y$. Следовательно, $Y = [A; B]$.
Строгое возрастание f^{-1} очевидно.

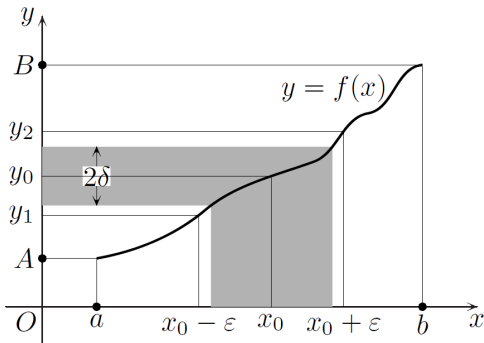
Установим непрерывность f^{-1} . Пусть сначала $y_0 \in (A; B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a; b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset [a; b].$$

Установим непрерывность f^{-1} . Пусть сначала $y_0 \in (A; B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a; b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset [a; b].$$

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$.



Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1; y_2] \subset [A; B]$. При этом $y_1 < y_0 < y_2$.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0 .

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0 .

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда односторонняя непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично, с использованием односторонних окрестностей.

Теорема доказана.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0 .

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда односторонняя непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично, с использованием односторонних окрестностей.

Теорема доказана.

Аналогично формулируется и доказывается теорема для непрерывной и строго убывающей на отрезке функции.

Теорема

Пусть функция $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ задана на интервале $(a; b)$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале $(A; B) = \left(\inf_{(a;b)} f; \sup_{(a;b)} f \right)$.

Теорема

Пусть функция $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ задана на интервале $(a; b)$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале $(A; B) = \left(\inf_{(a;b)} f; \sup_{(a;b)} f \right)$.

Доказательство. Найдем область значений $Y = f(X)$ функции f .

Покажем, что

$$\forall x \in (a; b) \rightarrow A < f(x) < B.$$

В самом деле. Допустим, например, что $f(x_0) \geq B$ при некотором $x_0 \in (a; b)$.

В силу строгого возрастания f получаем, что $\forall x \in (x_0; b) \rightarrow f(x) > B$, что противоречит тому, что $B = \sup_{(a;b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall y_0 \in (A; B) \rightarrow \exists x_0 \in (a; b) : f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists x_1, x_2 \in (a; b) : f(x_1) < y_0, f(x_2) > y_0.$$

Покажем теперь, что

$$\forall y_0 \in (A; B) \rightarrow \exists x_0 \in (a; b) : f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней граний следует, что

$$\exists x_1, x_2 \in (a; b) : f(x_1) < y_0, f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1; x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1; x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists x_0 \in [x_1, x_2] : f(x_0) = y_0.$$

Следовательно $f(a; b) = (A; B)$.

Непрерывность обратной функции f^{-1} следует из предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

Покажем теперь, что

$$\forall y_0 \in (A; B) \rightarrow \exists x_0 \in (a; b) : f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней грани следует, что

$$\exists x_1, x_2 \in (a; b) : f(x_1) < y_0, f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1; x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1; x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists x_0 \in [x_1, x_2] : f(x_0) = y_0.$$

Следовательно $f(a; b) = (A; B)$.

Непрерывность обратной функции f^{-1} следует из предыдущей теоремы. Теорема доказана.

Аналогично формулируется теорема для строго убывающей на интервале функции, а также теоремы об обратной функции для полуинтервалов.

Непрерывные функции

Показательная функция

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, называемая *степенной функцией* с показателем степени n , строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$ как произведение непрерывных функций. По теореме об обратной функции обратная функция f^{-1} , обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Непрерывные функции

Показательная функция

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, называемая *степенной функцией* с показателем степени n , строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$ как произведение непрерывных функций. По теореме об обратной функции обратная функция f^{-1} , обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Для рационального показателя степени $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ полагают при $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Тем самым a^r определено $\forall a \in (0, +\infty)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r :

1 $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

2 $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

3 $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

4 $a^0 = 1$;

5 $(ab)^r = a^r b^r$.

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r :

- 1 $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
- 2 $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
- 3 $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
- 4 $a^0 = 1$;
- 5 $(ab)^r = a^r b^r$.

Лемма Бернулли

Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leq 1$. Тогда

$$|a^r - 1| \leq 2|r|(a - 1).$$

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r :

- 1 $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
- 2 $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
- 3 $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
- 4 $a^0 = 1$;
- 5 $(ab)^r = a^r b^r$.

Лемма Бернулли

Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leq 1$. Тогда

$$|a^r - 1| \leq 2|r|(a - 1).$$

Доказательство. Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$, $a \geq 1 + n\lambda$, откуда $\lambda \leq \frac{a-1}{n}$, то есть

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1).$$

Пусть теперь $0 < r \leq 1$. Тогда $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1) \leq \frac{2}{n+1}(a - 1) < 2r(a - 1),$$

и неравенство в этом случае установлено.

Пусть теперь $0 < r \leq 1$. Тогда $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1) \leq \frac{2}{n+1}(a - 1) < 2r(a - 1),$$

и неравенство в этом случае установлено.

Пусть теперь $-1 \leq r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r |a^{-r} - 1| \leq a^r 2(-r)(a - 1)$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Пусть теперь $0 < r \leq 1$. Тогда $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1) \leq \frac{2}{n+1}(a - 1) < 2r(a - 1),$$

и неравенство в этом случае установлено.

Пусть теперь $-1 \leq r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r |a^{-r} - 1| \leq a^r 2(-r)(a - 1)$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Определение

Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Тогда

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ ($r_n \rightarrow x$);
- 3 по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Это определение корректно в следующем смысле:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ ($r_n \rightarrow x$);
- 3 по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Установим 1. Пусть $a > 1$, $r_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\forall n, m \geq n_1 \rightarrow |r_n - r_m| \leq 1$$

в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью леммы Бернулли имеем для $n, m \geq n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a - 1).$$

Это определение корректно в следующем смысле:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ ($r_n \rightarrow x$);
- 3 по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Установим 1. Пусть $a > 1$, $r_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\forall n, m \geq n_1 \rightarrow |r_n - r_m| \leq 1$$

в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью леммы Бернулли имеем для $n, m \geq n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a - 1).$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$\forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a^{r_m} \leq M.$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \rightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

Отсюда, при $0 < \varepsilon \leq 1$, имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq M2(a - 1)\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ существует и конечен.

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \rightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

Отсюда, при $0 < \varepsilon \leq 1$, имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq M2(a - 1)\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ существует и конечен.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}},$$

и существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования положительного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ тривиален.

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \rightarrow x$, $r'_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $r_n - r'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n} |a^{r_n - r'_n} - 1| \leq M 2 |r_n - r'_n| (a - 1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \rightarrow x$, $r'_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $r_n - r'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n} |a^{r_n - r'_n} - 1| \leq M2|r_n - r'_n|(a - 1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}.$$

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \rightarrow x$, $r'_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $r_n - r'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n} |a^{r_n - r'_n} - 1| \leq M 2 |r_n - r'_n| (a - 1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}.$$

Установим 3. Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \rightarrow a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a .

Функция $x \rightarrow e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \rightarrow a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a .

Функция $x \rightarrow e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Теорема

Показательная функция имеет следующие свойства:

- 1 $a^x > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$;
- 2 при $a > 1$ a^x строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает;
- 3 $a^x a^y = a^{x+y}$;
- 4 $(bc)^x = b^x c^x$;
- 5 $(a^x)^y = a^{xy}$;
- 6 a^x непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \rightarrow a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a .

Функция $x \rightarrow e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Теорема

Показательная функция имеет следующие свойства:

- 1 $a^x > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$;
- 2 при $a > 1$ a^x строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает;
- 3 $a^x a^y = a^{x+y}$;
- 4 $(bc)^x = b^x c^x$;
- 5 $(a^x)^y = a^{xy}$;
- 6 a^x непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Упражнение

Докажите теорему.