Математический анализ. Лекция VII

Сравнение функций

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

24 сентября 2013 г.

Теорема (критерий Коши)

Пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Для существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ \rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши)

Пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ \to \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ \to \ |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$\forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ \to \ |f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Для этого воспользуемся определением "по Гейне" предела функции. Пусть $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} \ \to \ x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0).$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Для этого воспользуемся определением "по Гейне" предела функции. Пусть $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} \ \to \ x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0).$$

Отсюда и из условия Коши имеем

$$\forall\, n, m \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} \ \to \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Для этого воспользуемся определением "по Гейне" предела функции. Пусть $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} \ \to \ x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0).$$

Отсюда и из условия Коши имеем

$$\forall\, n, m \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} \ \to \ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в силу критерия Коши для последовательностей. Пусть $A = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Для завершения доказательства остается показать, что для любой последовательности $\{x_n'\}$, $x_n' \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_n' \to x_0$ при $n \to \infty$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ (существующий по уже доказанному) также равен A. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = B \neq A$ для некоторой последовательности $\{x_n'\}$, $x_n' \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_n' \to x_0$ при $n \to \infty$.

Для завершения доказательства остается показать, что для любой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ при $n \to \infty$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ (существующий по уже доказанному) также равен A. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B \neq A$ для некоторой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ при $n \to \infty$.
Рассмотрим последовательность $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots\}$. Она, очевидно, сходится к x_0. Но последовательность $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots\}$ расходится, так как имеет два различных частичных предела A и B. Это противоречит доказанной сходимости всякой последовательности значений функции для сходящейся к x_0 последовательности значений аргументов.
Теорема доказана.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Множество $U_\varepsilon(x_0 - 0) = (x_0 - \varepsilon, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* ε. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Множество $U_\varepsilon(x_0 - 0) = (x_0 - \varepsilon, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* ε. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.
Множество $U_\varepsilon(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \varepsilon)$ называется *правой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* ε. Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Множество $U_\varepsilon(x_0 - 0) = (x_0 - \varepsilon, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* ε. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.
Множество $U_\varepsilon(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \varepsilon)$ называется *правой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* ε. Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.
Проколотыми полуокрестностями называют соответственно

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0 - 0) = (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$\mathring{U}(x_0 - 0) = U(x_0 - 0) \setminus \{x_0\},$$
$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0 + 0) = (x_0, x_0 + \varepsilon),$$
$$\mathring{U}(x_0 + 0) = U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}.$$

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке* x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\to\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \;\to\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке* x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\rightarrow\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall\, x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \;\rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке x_0*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \ \rightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Аналогично определяется *предел справа функции f в точке x_0* $\in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке x_0*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\to\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \;\to\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Аналогично определяется *предел справа функции f в точке x_0* $\in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пределы слева и справа называются *односторонними* пределами функции.

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке* x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \ \rightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Аналогично определяется *предел справа функции f в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пределы слева и справа называются *односторонними* пределами функции.

Будем пользоваться также следующими обозначениями для пределов:

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Определение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция f определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке* x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\rightarrow\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\; \forall\, x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \;\rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

При этом пишут $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$

Аналогично определяется *предел справа функции f в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пределы слева и справа называются *односторонними* пределами функции.

Будем пользоваться также следующими обозначениями для пределов:

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Упражнение

Сформулировать определения пределов слева и справа “по Гейне”.

Упражнение

Сформулировать и доказать критерий Коши существования конечного одностороннего предела функции.

Упражнение

Сформулировать и доказать критерий Коши существования конечного одностороннего предела функции.

Замечание

Можно расширить общее определение предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, считая в нем a либо числом, либо одним из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда это определение предела функции будет содержать и только что введенные понятия предела слева и предела справа.

Упражнение

Сформулировать и доказать критерий Коши существования конечного одностороннего предела функции.

Замечание

Можно расширить общее определение предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, считая в нем a либо числом, либо одним из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда это определение предела функции будет содержать и только что введенные понятия предела слева и предела справа.

Упражнение

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f определена на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда для существования $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно существования каждого из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и их равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *убывающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *убывающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Если вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то функцию называют *строго возрастающей* или *строго убывающей* соответственно.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Определение

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *убывающей на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Если вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то функцию называют *строго возрастающей* или *строго убывающей* соответственно. Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

Теорема

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f возрастает на (a, b). Тогда

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

(В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$)

Теорема

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f возрастает на (a, b). Тогда

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

(В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$)

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{(a,b)} f = B \leqslant +\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани функции следует, что

$$\exists\, x_\varepsilon \in (a, b) : \; f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B).$$

Теорема

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f возрастает на (a, b). Тогда

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

(В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$)

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{(a,b)} f = B \leqslant +\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани функции следует, что

$$\exists\, x_\varepsilon \in (a, b): \ f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B).$$

Выберем $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таким, что $x_\varepsilon \notin U_\delta(b)$ (то есть $U_\delta(b)$ лежит правее x_ε). Тогда $f(\mathring{U}_\delta(b-0)) \subset U_\varepsilon(B)$ в силу возрастания функции f. Следовательно, $\exists\, f(b-0) = B$.

Упражнение

Докажите соответствующую теорему для убывающей функции, а также для предела $f(a+0)$.

Упражнение

Докажите соответствующую теорему для убывающей функции, а также для предела $f(a+0)$.

Следствие

Пусть функция f монотонна на $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

Определение

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Функция $f: U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Определение

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Определение

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Упражнение

Докажите, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

Определение

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Упражнение

Докажите, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

Упражнение

Докажите, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

Далее будем считать, что функции f, g определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$ либо a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.

Далее будем считать, что функции f, g определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$ либо a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

Определение

Пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\forall x \in \mathring{U}(a) \ \to \ |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Тогда пишут $f = O(g)$ при $x \to a$.

Далее будем считать, что функции f, g определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$ либо a является одним из символов $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.

Определение

Пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\forall x \in \mathring{U}(a) \ \to \ |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Тогда пишут $f = O(g)$ при $x \to a$.

Определение

Функции f и g называются *функциями одного порядка при $x \to a$*, если

$$f = O(g), \quad g = O(f) \quad \text{при} \quad x \to a.$$

При этом пишут $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$.

Лемма

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.

Лемма

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|g(x)|}{|f(x)|} = |K| > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$

$$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \to\ \frac{1}{2}|K| \leqslant \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K|.$$

Лемма

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|g(x)|}{|f(x)|} = |K| > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$

$$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \to\ \frac{1}{2}|K| \leqslant \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K|.$$

Отсюда

$$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \to\ |g(x)| \leqslant \frac{3}{2}|K|\,|f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant \frac{2}{|K|}|g(x)|,$$

то есть f и g – функции одного порядка.

Лемма

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|g(x)|}{|f(x)|} = |K| > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$

$$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \rightarrow \ \frac{1}{2}|K| \leqslant \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K|.$$

Отсюда

$$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \rightarrow \ |g(x)| \leqslant \frac{3}{2}|K|\,|f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant \frac{2}{|K|}|g(x)|,$$

то есть f и g – функции одного порядка.

Определение

Функции f и g называются *эквивалентными при* $x \to a$, если $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причем $\lim_{x\to a}\lambda(x) = 1$ (записывается $f \sim g$ при $x \to a$).

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1. $f \sim g$ при $x \to ag \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);
2. $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to af \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1. $f \sim g$ при $x \to a g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);
2. $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

Упражнение

Докажите эти свойства.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1. $f \sim g$ при $x \to a g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);
2. $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

Упражнение

Докажите эти свойства.

Упражнение

Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1. $f \sim g$ при $x \to a g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);
2. $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

Упражнение

Докажите эти свойства.

Упражнение

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.

Определение

Функция g называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* f *при* $x \to a$ (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1. $f \sim g$ при $x \to a g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);
2. $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

Упражнение

Докажите эти свойства.

Упражнение

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.

Определение

Функция g называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* f *при* $x \to a$ (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Если при этом функции f, g являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция g является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция f.

Пример

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Пример

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема

Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Пример

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема

Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2 g_1}$$

и что

$$\lim_{x \to a} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = 1.$$