Математический анализ. Лекция XLIV

Неявные функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

14 мая 2014 г.

Неявные функции, определяемые одним уравнением

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$, где F – функция двух переменных x, y.

Определение

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *неявной* функцией, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$, если

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Если же на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ уравнения $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ эквивалентны, то говорят, что *уравнение $F(x, y) = 0$ разрешимо на E относительно переменного y.*

Теорема

Пусть функция F двух переменных x и y. $F(x_0, y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$;
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и сохраняет знак на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$.

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f: \ Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.

Теорема

Пусть функция F двух переменных x и y. $F(x_0, y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$;
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и сохраняет знак на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$.

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f: \ Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.
Если дополнительно считать, что F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Теорема

Пусть функция F двух переменных x и y. $F(x_0, y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$;
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и сохраняет знак на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$.

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f: \ Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.
Если дополнительно считать, что F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.
Если же при этом частные производные F'_x, F'_y непрерывны на $U(x_0, y_0)$, то производная $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$.

Доказательство. Пусть σ, $\varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция F непрерывна, а F'_y сохраняет знак. Будем считать, что $F'_y > 0$ на $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ как функция переменного y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Доказательство. Пусть σ, $\varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция F непрерывна, а F'_y сохраняет знак. Будем считать, что $F'_y > 0$ на $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ как функция переменного y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.
Отсюда следует (поскольку $F(x_0, y_0) = 0$), что

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Доказательство. Пусть σ, $\varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция F непрерывна, а F'_y сохраняет знак. Будем считать, что $F'_y > 0$ на $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ как функция переменного y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.
Отсюда следует (поскольку $F(x_0, y_0) = 0$), что

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Функции $F(x, y_0 - \varepsilon)$, $F(x, y_0 + \varepsilon)$ как функции переменного x непрерывны на $Q_\sigma(x_0)$ (и, следовательно, обладают свойством сохранения знака), так что найдется $\delta \in (0, \sigma]$ такое, что

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Зафиксируем произвольное значение $x^* \in Q_\delta(x_0)$. Поскольку $F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$, то по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $F(x^*, y)$ найдется $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, при котором $F(x^*, y^*) = 0$. Такое значение y^* единственно в силу строгой монотонности функции $F(x^*, y)$. Обозначим $y^* = f(x^*)$. Таким образом, построена функция $f\colon Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что $f(x_0) = y_0$,

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \text{на} \quad Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0).$$

Из последнего соотношения получаем, что $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x_0)$. Установим непрерывность функции f на $Q_\delta(x_0)$. Непрерывность f в точке x_0 следует из того, что в приведенных построениях число $\varepsilon > 0$ можно считать сколь угодно малым, причем для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ было указано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(Q_\delta(x_0)) \subset Q_\varepsilon(y_0) = Q_\varepsilon(f(x_0))$.
Пусть теперь x^* – произвольная точка из $Q_\delta(x_0)$, $y^* = f(x^*)$. Условия теоремы выполняются после замены в них (x_0, y_0) на (x^*, y^*). Следовательно, по уже доказанному, f непрерывна в точке x^*.

Предположим теперь, что F дифференцируема в точке (x_0, y_0). В силу дифференцируемости функции F

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =$$

$$= F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$+\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon_i(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, $i = 1, 2$. Здесь будем считать $|\Delta x|$ достаточно малым, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, так что $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.
Тогда получаем

$$0 = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$+\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Так как $|\Delta x|$, а значит, и $|\Delta y| = |\Delta f|$ достаточно малы, имеем

$$\Delta y = \frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)} \Delta x = \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция f дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}.$$

Если функция F дифференцируема не только в точке (x_0, y_0), но и на окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, то последняя формула верна для любого $x \in Q_\delta(x_0)$:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Из этой формулы вытекает последнее утверждение теоремы.

Обобщим теорему на случай неявной функции, заданной уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.
Далее будем пользоваться обозначениями:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y), \quad (x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0),$$

$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Теорема

Пусть задана функция $F(x,y) = F(x_1,\dots,x_n,y)$. $F(x^{(0)},y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)},y_0)$ точки $(x^{(0)},y_0)$;
2. $F'_y(x^{(0)},y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке $(x^{(0)},y_0)$.

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\delta(x^{(0)},y_0)$ точки $(x^{(0)},y_0)$ такая, что на ней

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f:\ Q_\delta(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$, $F(x,f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x^{(0)})$.

Теорема

Пусть задана функция $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$. $F(x^{(0)}, y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$;
2. $F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$.

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\delta(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$ такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f : \ Q_\delta(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x^{(0)})$.

Если дополнительно известно, что F дифференцируема в точке $(x^{(0)}, y_0)$, то f дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и при $i = 1, \ldots, n$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = -\dfrac{F'_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F'_y(x^{(0)}, y_0)}$.

Теорема

Пусть задана функция $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$. $F(x^{(0)}, y_0) = 0$ и

1. F непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$;
2. $F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$.

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\delta(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$ такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция $f:\ Q_\delta(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x^{(0)})$.

Если дополнительно известно, что F дифференцируема в точке $(x^{(0)}, y_0)$, то f дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и при $i = 1, \ldots, n$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = -\dfrac{F'_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F'_y(x^{(0)}, y_0)}$.

Если же при этом все частные производные первого порядка функции F непрерывны на $U(x^{(0)}, y_0)$, то при $i = 1, \ldots, n$ производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ непрерывны на $Q_\delta(x^{(0)})$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.