

Математический анализ. Лекция XXXVII

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

9 апреля 2014 г.

Теорема (признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1 если существует число $q < 1$ такое, что при некотором k_0

$$\forall k \geq k_0 \rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1 если существует число $q < 1$ такое, что при некотором k_0

$$\forall k \geq k_0 \rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

- 2 если при некотором k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \quad \forall k \geq k_0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. При $k \geq k_0$ из $a_{k+1} \leq qa_k$ следует, что

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Доказательство. 1°. При $k \geq k_0$ из $a_{k+1} \leq qa_k$ следует, что

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу признака сравнения.

Доказательство. 1°. При $k \geq k_0$ из $a_{k+1} \leq qa_k$ следует, что

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу признака сравнения.

2°. Из $a_{k+1} \geq a_k > 0$ следует, что общий член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- 2 если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- 2 если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
- 3 если $q = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leq q' a_k \forall k \geq k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}: a_{k+1} \leq q' a_k \forall k \geq k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}: a_k \geq 1 \forall k \geq k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leq q' a_k \forall k \geq k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $a_k \geq 1 \forall k \geq k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$.

Теорема (признак Коши)

Пусть $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1 если существует число $q < 1$ такое, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (признак Коши)

Пусть $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1 если существует число $q < 1$ такое, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

- 2 если

$$\forall k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq k_0 : \sqrt[k]{a_k} \geq 1,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leq q^k$ (для всех $k \geq k_0$) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leq q^k$ (для всех $k \geq k_0$) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

2°. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- 2 если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

- 1 если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- 2 если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
- 3 если $q = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}: \sqrt[k]{a_k} \leq q_0 < 1 \forall k \geq k_0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}: \sqrt[k]{a_k} \leq q_0 < 1 \forall k \geq k_0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

2°. $\forall k_0 \in \mathbb{N} \rightarrow \exists k \geq k_0: \sqrt[k]{a_k} \geq 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists k_0 \in \mathbb{N}: \sqrt[k]{a_k} \leq q_0 < 1 \forall k \geq k_0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

2°. $\forall k_0 \in \mathbb{N} \rightarrow \exists k \geq k_0: \sqrt[k]{a_k} \geq 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k} = 1.$$

Определение

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Определение

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \quad \text{при} \quad m \leq n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \quad \text{при} \quad m \leq n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Определение

Пусть заданы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \rightarrow n_k$, являющееся взаимно

однозначным соответствием $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют *рядом с*

переставленными членами по отношению к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный

перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Теорема

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный

перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$, то есть сходимость

ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$, следует из ограниченности последовательности частичных сумм последнего:

$$\sum_{k=1}^n |a_k^*| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k^*$.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N . Тогда при $m \geq N$

$$|S_m - S_n^*| \leq |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \dots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n -го члена ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N . Тогда при $m \geq N$

$$|S_m - S_n^*| \leq |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \dots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n -го члена ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leq \rho_n^* \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N . Тогда при $m \geq N$

$$|S_m - S_n^*| \leq |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \dots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n -го члена ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leq \rho_n^* \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $S_n^* \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, что равносильно равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Теорема

Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно.

Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

Теорема

Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно.

Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

Доказательство. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходится абсолютно, поскольку ограничена последовательность частичных сумм ряда из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{j=1}^n |a_{k_j}| |b_{m_j}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \right).$$

Поскольку сумма ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ не зависит от перестановки его членов,

будем считать, что члены ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} = \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку сумма ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ не зависит от перестановки его членов,

будем считать, что члены ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} = \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что

подпоследовательность $\{S_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходится к

числу $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$. Так как ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходящийся, то

последовательность его частичных сумм сходится к этому же числу.