Математический анализ. Лекция XXXIII

Свойства интегрируемых функций

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

26 марта 2014 г.

Лемма

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, и пусть $[a^*; b^*] \subset [a; b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*; b^*]$.

Лемма

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, и пусть $[a^*; b^*] \subset [a; b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*; b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a^*, b^*]$. Дополним τ^* до разбиения $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a; b]$ с мелкостью $|\tau| = |\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i_{\tau^*}} \omega_i^*(f)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $\omega_i^*(f) = \omega(f; [x_{i-1}^*, x_i^*])$.

Лемма

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, и пусть $[a^*; b^*] \subset [a; b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*; b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a^*, b^*]$. Дополним τ^* до разбиения $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a; b]$ с мелкостью $|\tau| = |\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i_{\tau^*}} \omega_i^*(f)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $\omega_i^*(f) = \omega(f; [x_{i-1}^*, x_i^*])$.
Для правой части неравенства выполнено стремится к нулю, при стремлении к нулю мелкости. Следовательно, и левая часть стремится к нулю.

Лемма (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования)

Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Лемма (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования)

Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Функция f как интегрируемая на $[a, c]$ и на $[c, b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a; b]$.

Лемма (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования)

Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Функция f как интегрируемая на $[a, c]$ и на $[c, b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a; b]$.
Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, τ_c – разбиение $[a; b]$, полученное дополнением разбиения τ точкой c (или совпадающее с τ, если $c \in \tau$). Пусть τ_c', τ_c'' – соответственно разбиения отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, порожденные разбиением τ_c.

Лемма (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования)

Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Функция f как интегрируемая на $[a, c]$ и на $[c, b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a; b]$.
Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, τ_c – разбиение $[a; b]$, полученное дополнением разбиения τ точкой c (или совпадающее с τ, если $c \in \tau$). Пусть τ_c', τ_c'' – соответственно разбиения отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, порожденные разбиением τ_c.
Сравним интегральные суммы Римана $S_\tau(f)$, $S_{\tau_c'}(f)$, $S_{\tau_c''}(f)$, считая отмеченные точки в первой из них произвольно выбранными, а во второй и в третьей – выбранными совпадающими с отмеченными точками в $S_\tau(f)$ (за исключением отрезков разбиения с концами в точке c).

Тогда

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Тогда

$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $\xi' \in [x_{i_0-1}, c]$, $\xi'' \in [c, x_{i_0}]$

$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Тогда
$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $\xi' \in [x_{i_0-1}, c]$, $\xi'' \in [c, x_{i_0}]$
$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Отсюда получаем, что
$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f)\right| \leqslant 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2M|\tau|.$$

Тогда
$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $\xi' \in [x_{i_0-1}, c]$, $\xi'' \in [c, x_{i_0}]$
$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Отсюда получаем, что
$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f)\right| \leqslant 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2M|\tau|.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и учитывая, что при этом
$$S_{\tau'_c}(f) \to \int_a^c f(x)\,dx, \quad S_{\tau''_c}(f) \to \int_c^b f(x)\,dx,$$
заключаем, что что функция интегрируема на $[a; b]$ и
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Замечание

Положим $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$. Тогда равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

справедливо при любом расположении точек a, b, c для функции f, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

Лемма (Линейность интеграла)

Если функции f, g интегрируемы на $[a;b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Лемма (Линейность интеграла)

Если функции f, g интегрируемы на $[a; b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство получается предельным переходом при $|\tau| \to 0$ из соответствующего равенства для интегральных сумм Римана.

Лемма

Если функции f, g интегрируемы на $[a; b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a; b]$.

Лемма

Если функции f, g интегрируемы на $[a; b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a; b]$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= \Delta f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Лемма

Если функции f, g интегрируемы на $[a; b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a; b]$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)=$$

$$=\Delta f(x_0)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Отсюда при условии ограниченности функций f, g на отрезке $[a; b]$, имеем

$$\omega(fg;[c,d])\leqslant M\,\omega(f;[c,d])+M\,\omega(g;[c,d]),$$

если $[c,d]\subset[a;b]$, $|f|$, $|g|\leqslant M$ на $[a;b]$.

Лемма

Если функции f, g интегрируемы на $[a;b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a;b]$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= \Delta f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Отсюда при условии ограниченности функций f, g на отрезке $[a;b]$, имеем

$$\omega(fg;[c,d]) \leqslant M\,\omega(f;[c,d]) + M\,\omega(g;[c,d]),$$

если $[c,d] \subset [a;b]$, $|f|$, $|g| \leqslant M$ на $[a;b]$.
Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i + M\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(g)\Delta x_i.$$

Лемма

Если функции f, g интегрируемы на $[a; b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a; b]$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= \Delta f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Отсюда при условии ограниченности функций f, g на отрезке $[a; b]$, имеем

$$\omega(fg; [c,d]) \leqslant M\,\omega(f; [c,d]) + M\,\omega(g; [c,d]),$$

если $[c,d] \subset [a; b]$, $|f|$, $|g| \leqslant M$ на $[a; b]$.
Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i + M \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(g)\Delta x_i.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и пользуясь критерием интегрируемости функции, получаем, что произведение fg интегрируемо на $[a; b]$.

Лемма

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$ и $\inf\limits_{[a;b]} f > 0$. Тогда функция $\dfrac{1}{f}$ интегрируема на $[a;b]$.

Лемма

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$ и $\inf\limits_{[a;b]} f > 0$. Тогда функция $\dfrac{1}{f}$ интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство, аналогично предыдущей лемме, сводится к оценке колебания $\omega_i\left(\dfrac{1}{f}\right)$ через колебание $\omega_i(f)$.

Лемма

Пусть функции f, g интегрируемы на $[a; b]$ и $f \leqslant g$ на $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Лемма

Пусть функции f, g интегрируемы на $[a;b]$ и $f \leqslant g$ на $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться предельным переходом при $|\tau| \to 0$ в неравенстве для интегральных сумм Римана:

$$|S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})| \leqslant S_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}).$$

Лемма

Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то функция $|f|$ интегрируема на $[a;b]$ и
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Лемма

Если функция f интегрируема на $[a; b]$, то функция $|f|$ интегрируема на $[a; b]$ и
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Интегрируемость $|f|$ следует из оценки
$$|f(\xi')| - |f(\xi'')| \leqslant |f(\xi') - f(\xi'')|,$$
откуда $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$ и
$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Лемма

Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то функция $|f|$ интегрируема на $[a;b]$ и
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Интегрируемость $|f|$ следует из оценки
$$|f(\xi')| - |f(\xi'')| \leqslant |f(\xi') - f(\xi'')|,$$
откуда $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$ и
$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Оценка
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
получается предельным переходом из соответствующей оценки для интегральных сумм Римана:
$$S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(|f|;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}).$$

Замечание

Интегрируемость $|f|$ на $[a; b]$ не влечет за собой интегрируемость f на $[a; b]$, что можно увидеть на примере функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ рациональном}, \\ -1 & \text{при } x \text{ иррациональном}. \end{cases}$$

Лемма (Интеграл не замечает изменения функции в конечном числе точек)

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, функция f^* отличается от f лишь значениями в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Лемма (Интеграл не замечает изменения функции в конечном числе точек)

Пусть функция f интегрируема на $[a; b]$, функция f^* отличается от f лишь значениями в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a; b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что функция $\varphi = f^* - f$ интегрируема на $[a; b]$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Пусть φ отлична от нуля в N точках и $\max\limits_{[a;b]} |\varphi| = M$.

Лемма (Интеграл не замечает изменения функции в конечном числе точек)

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, функция f^* отличается от f лишь значениями в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что функция $\varphi = f^* - f$ интегрируема на $[a;b]$ и $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Пусть φ отлична от нуля в N точках и $\max\limits_{[a;b]} |\varphi| = M$. Тогда

$$|S_\tau(\varphi)| \leqslant 2MN|\tau|,$$

и остается перейти в этом неравенстве к пределу при $|\tau| \to 0$.

Теорема

Пусть на отрезке $[a; b]$ функция f непрерывна и $f \geqslant 0$, $x_0 \in [a; b]$, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Теорема

Пусть на отрезке $[a; b]$ функция f непрерывна и $f \geqslant 0$, $x_0 \in [a; b]$, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Пусть $f(x_0) = d > 0$. Тогда найдется отрезок $[a^*, b^*] \subset [a; b]$, на котором $f \geqslant \frac{d}{2}$. Для него имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^{b^*} f(x)\,dx + \int_{b^*}^{b} f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 0 + \int_{a^*}^{b^*} \frac{d}{2}\,dx + 0 = \frac{d}{2}(b^* - a^*) > 0.$$

Теорема о среднем для интеграла

Пусть функции f, g интегрируемы на отрезке $[a;b]$,

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \text{на} \quad [a;b],$$

и пусть функция g не меняет знака на отрезке $[a;b]$.
Тогда

$$\exists\, \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема о среднем для интеграла

Пусть функции f, g интегрируемы на отрезке $[a; b]$,

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \text{на} \quad [a; b],$$

и пусть функция g не меняет знака на отрезке $[a; b]$.
Тогда

$$\exists\, \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a; b]$

$$\exists\, c \in [a; b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $g \geqslant 0$ на $[a; b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a; b].$$

Отсюда

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $g \geqslant 0$ на $[a; b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a; b].$$

Отсюда

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Пусть сначала $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и в качестве μ можно взять произвольное число.

Доказательство. Пусть, для определенности, $g \geqslant 0$ на $[a; b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a; b].$$

Отсюда

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Пусть сначала $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и в качестве μ можно взять произвольное число.

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Возьмем $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$.

Вторая часть теоремы следует из теоремы о промежуточном значении