

Математический анализ. Лекция III

Предел последовательности

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

10 сентября 2013 г.

Предел последовательности

Определение предела последовательности

Определение

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

которая обозначается $\{a_n\}$. Пара (n, a_n) называется *n -м элементом* последовательности, а число a_n — *значением* этого элемента.

Предел последовательности

Определение предела последовательности

Определение

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

которая обозначается $\{a_n\}$. Пара (n, a_n) называется *n -м элементом* последовательности, а число a_n – *значением* этого элемента.

Замечание

Всякая последовательность имеет счетное множество элементов. Множество значений элементов последовательности может быть конечным или счетным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Определение

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a - a_n| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

или

$$a_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Можно обобщить понятие предела числовой последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Можно обобщить понятие предела числовой последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Рассмотрим множества $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ и $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

Определение

При $\varepsilon > 0$ ε -окрестностью числа a называется $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; ε -окрестностью элементов $+\infty$, $-\infty$, ∞ называются множества

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right); \quad U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right);$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right).$$

Через $U(a)$ при $a \in \hat{\mathbb{R}}$ обозначается произвольная ε -окрестность элемента a .

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения всех (за исключением быть может, конечного числа) элементы последовательности.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения всех (за исключением быть может, конечного числа) элементы последовательности.

Везде далее, если какое-то свойство выполняется для всех членов последовательности, кроме конечного их числа, будем говорить, что это свойство выполняется для *почти всех* членов последовательности.

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$ (или в $\hat{\mathbb{R}}$)*, если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$ (или в $\hat{\mathbb{R}}$)*, если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Упражнение

Докажите, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$ (или в $\hat{\mathbb{R}}$)*, если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Упражнение

Докажите, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

Упражнение

Являются ли следующие последовательности сходящимися в \mathbb{R} , $\overline{\mathbb{R}}$, $\hat{\mathbb{R}}$:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}; \quad \{(-1)^n\}; \quad \{n\}; \quad \{(-1)^n n\}.$$

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Доказательство. Допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$. Тогда по определению предела

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a);$$

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n'_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a').$$

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Доказательство. Допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$. Тогда по определению предела

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a);$$

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n'_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a').$$

Пусть $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, тогда

$$\forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset,$$

а это невозможно. Теорема доказана.

Предел последовательности

Свойства пределов, связанные с неравенствами

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если множество значений ее элементов ограничено.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если множество значений ее элементов ограничено сверху.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если множество значений ее элементов ограничено снизу.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n| \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \geq m.$$

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n| \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \geq m.$$

Очевидно, что данные определения равносильны.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n| \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \geq m.$$

Очевидно, что данные определения равносильны.

Упражнение

Последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и ограничена снизу.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \rightarrow |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall n \geq n_1 \rightarrow a - 1 < a_n < a + 1.$$

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \rightarrow |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall n \geq n_1 \rightarrow a - 1 < a_n < a + 1.$$

Пусть

$$m = \min\{a - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\};$$

$$M = \max\{a + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}.$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена снизу числом m , и сверху числом M . Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена сверху. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу. Теорема доказана.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \rightarrow |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall n \geq n_1 \rightarrow a - 1 < a_n < a + 1.$$

Пусть

$$m = \min\{a - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\};$$

$$M = \max\{a + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}.$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена снизу числом m , и сверху числом M . Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена сверху. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу. Теорема доказана.

Замечание

Не всякая ограниченная последовательность сходится. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограниченная и расходящаяся.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

① если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n < b;$$

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n < b;$$

2 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b$, то $a \leq b$.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n < b;$$

2 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b$, то $a \leq b$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = b - a > 0$, тогда

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Значит, $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Следовательно, $a_n < a + \varepsilon = b$.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n < b;$$

2 если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b$, то $a \leq b$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = b - a > 0$, тогда

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Значит, $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Следовательно, $a_n < a + \varepsilon = b$.

2. Допустим, что $a > b$, то, аналогично предыдущему пункту, получаем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \rightarrow a_n > b.$$

Что противоречит утверждению теоремы.

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Доказательство. Из определения предела, для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon^{(1)} \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

$$\exists n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon^{(2)} \rightarrow c_n \in U_\varepsilon(a).$$

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Доказательство. Из определения предела, для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon^{(1)} \rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

$$\exists n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon^{(2)} \rightarrow c_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пусть $n = \max\{n_\varepsilon^{(1)}; n_\varepsilon^{(2)}\}$. Тогда

$$\forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow b_n \in [a_n; c_n] \subset U_\varepsilon(a).$$

Теорема доказана.