# Математический анализ. Лекция XXVI

## Непрерывные функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

19 февраля 2014 г.

## Теорема

Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждая из $m$ функций $f_1, \dots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$. Пусть также

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in F \subset \mathbb{R}^m \quad \forall x \in E$$

и функция $g$ непрерывна в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ по множеству $F$.
Тогда определенная на $E$ сложная функция

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad h: \ E \to \mathbb{R},$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

## Теорема

Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждая из $m$ функций $f_1, \dots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$. Пусть также

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in F \subset \mathbb{R}^m \quad \forall\, x \in E$$

и функция $g$ непрерывна в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ по множеству $F$.
Тогда определенная на $E$ сложная функция

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad h: \ E \to \mathbb{R},$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0$: $|g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon$ при $y \in F \cap U_\eta(y^{(0)})$.

## Теорема

Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждая из $m$ функций $f_1, \ldots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$. Пусть также

$$(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in F \subset \mathbb{R}^m \quad \forall x \in E$$

и функция $g$ непрерывна в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$ по множеству $F$.
Тогда определенная на $E$ сложная функция

$$h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad h: \ E \to \mathbb{R},$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0$: $|g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon$ при $y \in F \cap U_\eta(y^{(0)})$. Выберем теперь $\delta = \delta(\eta) = \delta(\eta(\varepsilon)) = \delta_\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$|f_1(x) - f_1(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}, \ldots, |f_m(x) - f_m(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}$$

при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$.
Мы использовали непрерывность функций $g$, $f_1, \ldots, f_m$ в соответствующих точках.

Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$:

$$|y - y^{(0)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(x) - f_i(x^{(0)})\right)^2} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \dots, f_m(x)) - \ g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))| =$$
$$= |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$:

$$|y - y^{(0)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(x) - f_i(x^{(0)})\right)^2} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \dots, f_m(x)) - \ g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))| =$$
$$= |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $h$ непрерывна в $x^{(0)}$ по множеству $E$.

Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$:

$$|y - y^{(0)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(x) - f_i(x^{(0)})\right)^2} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) - \ g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))| =$$
$$= |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $h$ непрерывна в $x^{(0)}$ по множеству $E$.

**Упражнение**

Сформулировать и доказать теорему о пределе сложной функции, аналогичную доказанной теореме о непрерывности сложной функции. Сравнить с соответствующими теоремами для $n = m = 1$.

# Функции, непрерывные на множестве

## Определение

*Верхней гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определенной на $E$, называется

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x).$$

# Функции, непрерывные на множестве

## Определение

*Верхней гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определенной на $E$, называется

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x).$$

*Нижней гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определенной на $E$, называется

$$\inf_E f = \inf_{x \in E} f(x).$$

# Функции, непрерывные на множестве

## Определение

*Верхней гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определенной на $E$, называется

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x).$$

*Нижней гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определенной на $E$, называется

$$\inf_E f = \inf_{x \in E} f(x).$$

## Определение

Функция $f$, непрерывная в каждой точке $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ по множеству $E$, называется *непрерывной на множестве* $E$.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на $E$ и достигает на $E$ своих верхней и нижней граней.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на $E$ и достигает на $E$ своих верхней и нижней граней.

Доказательство проведем лишь для случая верхней грани. Пусть $B = \sup\limits_E f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \in E$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = B$.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на $E$ и достигает на $E$ своих верхней и нижней граней.

Доказательство проведем лишь для случая верхней грани. Пусть $B = \sup\limits_E f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \in E$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = B$.

Последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена в силу ограниченности множества $E$. На основании теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^{(0)} = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)}$.

Точка $x^{(0)}$ принадлежит $E$ в силу замкнутости $E$. Следовательно, $f$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

Теперь из соотношений

$$f(x^{(m_k)}) \to B, \quad f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^{(0)}) = B$, то есть что верхняя грань функции $f$ достигается в точке $x^{(0)} \in E$. Следовательно, верхняя грань $\sup\limits_E f$ конечна, а функция $f$ ограничена сверху на $E$.
Аналогично доказывается, что функция $f$ достигает своей нижней грани на $E$ и ограничена снизу на $E$. Теорема доказана.

## Определение

Функция $f$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in E : \ |x' - x''| < \delta \ \rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

## Определение

Функция $f$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in E : \ |x' - x''| < \delta \ \to \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Если функция $f$ равномерно непрерывна на $E$, то она и непрерывна на $E$ (то есть непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$). Для доказательства этого достаточно взять $x'' = x^{(0)}$, $x' = x$.

## Определение

Функция $f$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x', x'' \in E : \ |x' - x''| < \delta \ \rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Если функция $f$ равномерно непрерывна на $E$, то она и непрерывна на $E$ (то есть непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$). Для доказательства этого достаточно взять $x'' = x^{(0)}$, $x' = x$.

Обратное неверно. Например, при $n = 1$ функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, непрерывные на $E = (0, 1)$, не являются равномерно непрерывными на $E$.

Однако, если $E$ – компакт, то непрерывность функции на $E$ эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на $E$ в силу следующей теоремы.

Однако, если $E$ – компакт, то непрерывность функции на $E$ эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на $E$ в силу следующей теоремы.

### Теорема Кантора

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $E$.

Однако, если $E$ – компакт, то непрерывность функции на $E$ эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на $E$ в силу следующей теоремы.

## Теорема Кантора

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $E$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, то есть что существует функция $f$, непрерывная, но не равномерно непрерывная на $E$. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \ \forall\, \delta > 0 \ \to \ \exists\, x, y \in E : \ |x - y| < \delta, \ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Однако, если $E$ – компакт, то непрерывность функции на $E$ эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на $E$ в силу следующей теоремы.

## Теорема Кантора

Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $E$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, то есть что существует функция $f$, непрерывная, но не равномерно непрерывная на $E$. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \ \forall\, \delta > 0 \ \to \ \exists\, x, y \in E : \ |x - y| < \delta, \ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем в качестве $\delta$ брать $\delta_m = \dfrac{1}{m}$ и обозначать через $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ соответствующую пару точек $x$, $y$.
Тогда имеем

$$x^{(m)}, y^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m},$$

$$|f(x^{(m)}) - f(y^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса.

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$.

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как $E$ замкнуто.

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как $E$ замкнуто. В силу непрерывности $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}), \quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty,$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как $E$ замкнуто. В силу непрерывности $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}), \quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty,$$

так что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| + |f(y^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как $E$ замкнуто. В силу непрерывности $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}), \quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty,$$

так что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| + |f(y^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Это противоречит тому, что

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \ \to \ |f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Теорема доказана.

## Упражнение

Пусть функция $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную на $(a; b)$. Показать, что $f$ равномерно непрерывна на $(a; b)$.

## Упражнение

Пусть функция $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную на $(a;b)$. Показать, что $f$ равномерно непрерывна на $(a;b)$.

## Определение

Пусть функция $f$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Ее *модулем непрерывности* (на $E$) называется функция $\omega\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$, где

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f; E) = \sup\{|f(x) - f(y)| :\ x, y \in E,\ |x - y| \leqslant \delta\}.$$

### Теорема

Пусть функция $f$ определена на $E \subset \mathbb{R}$. Для ее равномерной непрерывности на $E$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega(0+0; f; E) = 0.$$

## Теорема

Пусть функция $f$ определена на $E \subset \mathbb{R}$. Для ее равномерной непрерывности на $E$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega(0+0; f; E) = 0.$$

Доказательство. Пусть $f$ равномерно непрерывна на $E$. Тогда из определения равномерной непрерывности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \omega(\delta; f) \leqslant \varepsilon \text{ при } 0 < \delta < \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, $\omega(0+0; f) = 0$.

## Теорема

Пусть функция $f$ определена на $E \subset \mathbb{R}$. Для ее равномерной непрерывности на $E$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega(0+0; f; E) = 0.$$

Доказательство. Пусть $f$ равномерно непрерывна на $E$. Тогда из определения равномерной непрерывности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \omega(\delta; f) \leqslant \varepsilon \text{ при } 0 < \delta < \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, $\omega(0+0; f) = 0$.
Пусть $\omega(0+0; f) = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \omega(\delta(\varepsilon); f) < \varepsilon.$$

Тогда выполняется определение равномерной непрерывности функции $f$ на $E$.

## Теорема Коши о промежуточном значении функции

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция $f$ непрерывна на $G$. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то

$$\forall\, C \in (f(a), f(b)) \quad \exists\, c \in G : \ f(c) = C.$$

## Теорема Коши о промежуточном значении функции

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция $f$ непрерывна на $G$. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то

$$\forall\, C \in (f(a), f(b)) \quad \exists\, c \in G: \; f(c) = C.$$

Доказательство. Область – это открытое связное множество, так что для точек $a, b \in G$ существует кривая

$$\Gamma = \{x = \varphi(t): \; \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \varphi(\alpha) = a, \; \varphi(\beta) = b, \quad \mathit{\Gamma} \subset G.$$

## Теорема Коши о промежуточном значении функции

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция $f$ непрерывна на $G$. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то

$$\forall\, C \in (f(a), f(b)) \quad \exists\, c \in G: \ f(c) = C.$$

Доказательство. Область – это открытое связное множество, так что для точек $a, b \in G$ существует кривая

$$\Gamma = \{x = \varphi(t): \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b, \quad \Gamma \subset G.$$

Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(\varphi(t))$. Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Кроме того, $g(\alpha) = f(a)$, $g(\beta) = f(b)$. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции

$$\exists\, \xi \in [\alpha, \beta]: \ g(\xi) = f(\varphi(\xi)) = C.$$

Взяв $c = \varphi(\xi)$, приходим к утверждению теоремы.

## Следствие

Теорема Коши о промежуточном значении сохранится, если в ее формулировке заменить область $G$ на замкнутую область $\overline{G}$.

## Следствие

Теорема Коши о промежуточном значении сохранится, если в ее формулировке заменить область $G$ на замкнутую область $\overline{G}$.

Доказательство. Пусть $a; b \in \overline{G}$, $f(a) < C < f(b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $f(a) + \varepsilon < C < f(b) - \varepsilon$. В силу непрерывности функции $f$ в точках $a$, $b$, найдутся точки $a^{(0)}$, $b^{(0)} \in G$ такие, что

$$|f(a) - f(a^{(0)})| < \varepsilon, \quad |f(b) - f(b^{(0)})| < \varepsilon.$$

Тогда $f(a^{(0)}) < C < f(b^{(0)})$ и остается применить доказанную теорему.

## Следствие

Теорема Коши о промежуточном значении сохранится, если в ее формулировке заменить область $G$ на замкнутую область $\overline{G}$.

Доказательство. Пусть $a; b \in \overline{G}$, $f(a) < C < f(b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $f(a) + \varepsilon < C < f(b) - \varepsilon$. В силу непрерывности функции $f$ в точках $a$, $b$, найдутся точки $a^{(0)}$, $b^{(0)} \in G$ такие, что

$$|f(a) - f(a^{(0)})| < \varepsilon, \quad |f(b) - f(b^{(0)})| < \varepsilon.$$

Тогда $f(a^{(0)}) < C < f(b^{(0)})$ и остается применить доказанную теорему.