Математический анализ. Лекция XXV

Предел функции многих переменных

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

14 февраля 2014 г.

Предел функции многих переменных

Будем рассматривать числовые функции, определенные на множестве X точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f: \ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

Предел функции многих переменных

Будем рассматривать числовые функции, определенные на множестве X точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f: \ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

Множество X называется *областью определения функции* f. Через $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается *значение функции* f в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Предел функции многих переменных

Будем рассматривать числовые функции, определенные на множестве X точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f: \ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

Множество X называется *областью определения функции* f. Через $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается *значение функции* f в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Графиком функции f называется множество точек

$$\{(x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in X, \ x_{n+1} = f(x)\}.$$

Определение

Будем говорить, что функция f

1. определена в точке x, если $x \in X$;
2. не определена в точке x, если $x \notin X$;
3. определена на множестве E, если $E \subset X$.

Определение

Будем говорить, что функция f

1. определена в точке x, если $x \in X$;
2. не определена в точке x, если $x \notin X$;
3. определена на множестве E, если $E \subset X$.

Определение

Пусть функция f определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Число A называется *пределом функции f при $x \to x^{(0)}$ по множеству E* (пишется $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$), если

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, U(x^{(0)}) : \ f(E \cap \mathring{U}(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(A)$, или
2. $\forall \{x^{(m)}\} : \ x^{(m)} \in E \setminus \{x^{(0)}\}, x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty \to \lim\limits_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = A$.

Определение

Будем говорить, что функция f

1. определена в точке x, если $x \in X$;
2. не определена в точке x, если $x \notin X$;
3. определена на множестве E, если $E \subset X$.

Определение

Пусть функция f определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Число A называется *предeлом функции f при $x \to x^{(0)}$ по множеству E* (пишется $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$), если

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, U(x^{(0)}) : \ f(E \cap \mathring{U}(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(A)$, или
2. $\forall \{x^{(m)}\} : \ x^{(m)} \in E \setminus \{x^{(0)}\}, x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty \to \lim\limits_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = A$.

Здесь даны два определения предела, их эквивалентность устанавливается так же, как в случае $n = 1$.

Упражнение

Сформулируйте обобщение определения предела на случаи $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, ориентируясь на соответствующие обобщения для $n = 1$.

Упражнение

Сформулируйте обобщение определения предела на случаи $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, ориентируясь на соответствующие обобщения для $n = 1$.

Замечание

Если $E \supset \mathring{U}_\delta(x^{(0)})$ при некотором $\delta > 0$, то вместо $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ пишут просто $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и этот предел называют *пределом функции* f *при* $x \to x^{(0)}$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции)

Пусть функция f определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x', x'' \in E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) \ \to \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции)

Пусть функция f определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists \delta > 0 : \ \forall x', x'' \in E \cap \mathring{U}_{\delta}(x^{(0)}) \ \to \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство не отличается по существу от доказательства для функций одного переменного.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции)

Пусть функция f определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists \delta > 0 : \ \forall x', x'' \in E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) \ \to \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство не отличается по существу от доказательства для функций одного переменного.

Пределы функций многих переменных по множеству обладают арифметическими свойствами и свойствами, связанными с неравенствами, аналогичными соответствующим свойствам пределов функций одного переменного. Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответсвующих теорем для функций одного переменного.

Определение

Функция f, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве* E, если множество $f(E)$ ограничено, то есть если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall x \in E.$$

Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху и ограниченности снизу функции f на множестве E.

Определение

Функция f, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве* E, если множество $f(E)$ ограничено, то есть если существует число $B > 0$ такое, что
$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall x \in E.$$
Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху и ограниченности снизу функции f на множестве E.

Теорема

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ – предельная точка множества E, и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция f ограничена на $E \cap \mathring{U}_\delta$.

Определение

Функция f, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве* E, если множество $f(E)$ ограничено, то есть если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall x \in E.$$

Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху и ограниченности снизу функции f на множестве E.

Теорема

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ – предельная точка множества E, и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция f ограничена на $E \cap \mathring{U}_\delta$.

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$, $E = U(x_0)$.

Определение

Если в определении предела функции $f: X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества E взято при некотором $\delta_0 > 0$ пересечение $\mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)})$ с некоторой кривой Γ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с прямой L (проходящей через $x^{(0)}$), либо с лучом ℓ (с вершиной в $x^{(0)}$), то $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ называется *пределом функции f в точке $x^{(0)}$* соответственно *по кривой* Γ, *по прямой* L, *по направлению* e (если луч $\ell = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x^{(0)} + te,\ t \geqslant 0\}$, $|e| = 1$).

Определение

Если в определении предела функции $f: X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества E взято при некотором $\delta_0 > 0$ пересечение $\mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)})$ с некоторой кривой Γ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с прямой L (проходящей через $x^{(0)}$), либо с лучом ℓ (с вершиной в $x^{(0)}$), то $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ называется *пределом функции f в точке $x^{(0)}$* соответственно *по кривой* Γ, *по прямой* L, *по направлению* e (если луч $\ell = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x^{(0)} + te,\ t \geqslant 0\}$, $|e| = 1$).

Очевидно, $\lim\limits_{\ell \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ совпадает с $\lim\limits_{t \to 0+0} f(x_1^{(0)} + te_1, \ldots, x_n^{(0)} + te_n)$, где $e = (e_1, \ldots, e_n)$.

Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, причем значения этих пределов совпадают с пределом функции f в точке $x^{(0)}$.

Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, причем значения этих пределов совпадают с пределом функции f в точке $x^{(0)}$. Обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2, \\ 0 & \text{при } y \neq x^2, \end{cases}$$

которая в точке $(0, 0)$ не имеет предела, но имеет равные нулю пределы по каждому направлению.

Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, причем значения этих пределов совпадают с пределом функции f в точке $x^{(0)}$. Обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2, \\ 0 & \text{при } y \neq x^2, \end{cases}$$

которая в точке $(0,0)$ не имеет предела, но имеет равные нулю пределы по каждому направлению.

Упражнение

Покажите, что функция двух переменных

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0)$$

имеет в точке $(0,0)$ предел по каждому направлению, значение которого зависит от направления.

На примере функций двух переменных рассмотрим иное понятие предельного перехода, состоящее в последовательном предельном переходе по различным переменным.

На примере функций двух переменных рассмотрим иное понятие предельного перехода, состоящее в последовательном предельном переходе по различным переменным.

Определение

Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0). *Повторными пределами функции* f *в точке* (x_0, y_0) называют пределы

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right).$$

Покажем на примерах, что существование повторных пределов не связано с существованием обычного предела.

Покажем на примерах, что существование повторных пределов не связано с существованием обычного предела.

Пример

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2>0).$$

Оба повторных предела существуют и равны нулю, а $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует.

Пример

$$g(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\bigl(\lim\limits_{y\to0} g(x,y)\bigr)=0$, а повторный предел $\lim\limits_{y\to0}\bigl(\lim\limits_{x\to0} g(x,y)\bigr)$ не существует.

Пример

$$h(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)) = 0 \neq \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)) = 1.$

Пример

$$h(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)) = 0 \neq \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)) = 1.$

Упражнение

Докажите, что если существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A \in \mathbb{R}$ и при некотором $\delta > 0$ для любого $y \in \mathring{U}_\delta(0)$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, то существует $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = A$.

Функции, непрерывные в точке

Определение

Пусть функция

$$f:\ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ (то есть $E \subset X$), и пусть $x^{(0)} \in E$. Говорят, что функция f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E, если

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\exists\, U(x^{(0)}) :\ f(E \cap U(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$, или
2. $\forall \{x^{(m)}\} :\ x^{(m)} \in E,\ x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty \to \lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})$.

Определение

Пусть функция
$$f:\ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$
определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ (то есть $E \subset X$), и пусть $x^{(0)} \in E$. Говорят, что функция f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E, если

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists \exists\, U(x^{(0)}) :\ f(E \cap U(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$, или
2. $\forall \{x^{(m)}\} :\ x^{(m)} \in E,\ x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty \to \lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})$.

Здесь даны два определения непрерывности функции в точке по множеству. Их эквивалентность вытекает из эквивалентности соответствующих определений предела функции в точке.

Следует учесть что

1. Если $x^{(0)}$ – предельная точка множества E, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E равносильна тому, что $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.
2. Если $x^{(0)}$ – изолированная точка множества E, то всякая функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E, а понятие предела функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E не определено.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству E, и свойство ограниченности функции f на $E \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ – изолированная точка множества E, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ – предельная точка множества E.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству E, и свойство ограниченности функции f на $E \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ – изолированная точка множества E, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ – предельная точка множества E.

Лемма о сохранении знака

Пусть функция f непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \ \rightarrow \ \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^{(0)}).$$

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству E, и свойство ограниченности функции f на $E \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ – изолированная точка множества E, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ – предельная точка множества E.

Лемма о сохранении знака

Пусть функция f непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \ \to \ \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^{(0)}).$$

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$.