Математический анализ. Лекция XXIV

Открытые и замкнутые множества

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

12 февраля 2014 г.

Открытые и замкнутые множества

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Упражнение

Докажите, что

1. пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;
2. объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$.
Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.
Пусть $y \in U_\delta(x)$, то есть $|y - x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y - a| \leqslant |y - x| + |x - a| < \delta + r = \varepsilon,$$

то есть $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться обозначения проколотых окрестностей:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \mathring{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \ \forall\, m \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \ \forall\, m \in \mathbb{N} \ \to \ a \neq x^{(m)} \in E, \qquad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \to \ E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing.$$

Упражнение

Докажите эквивалентность этих определений.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} = E \cup \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, x \text{ – предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} = E \cup \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, x \text{ – предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Упражнение

Множестово E замкнуто тогда и только тогда, когда $E = \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\}: \ a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} : \ a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\} : \ a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\}: \; a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\}: \; a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin E$, то $y^{(m)}$ – предельная точка множества E (поскольку $y^{(m)} \in \overline{E}$). В этом случае через $x^{(m)}$ обозначим такую точку множества E, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{\varepsilon_m}{2}$.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде:

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$

Упражнение

Докажите, что если F – замкнутое, а G – открытое множества пространства $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

Упражнение

Докажите, что если F – замкнутое, а G – открытое множества пространства $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $U_\varepsilon(a)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит как точки из E, так и точки не из E.

Упражнение

Докажите, что если F – замкнутое, а G – открытое множества пространства $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $U_\varepsilon(a)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит как точки из E, так и точки не из E.
Границей ∂E *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество граничных точек множества E.

Упражнение

Докажите, что если F – замкнутое, а G – открытое множества пространства $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $U_\varepsilon(a)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит как точки из E, так и точки не из E.
Границей ∂E *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество граничных точек множества E.

Граничная точка множества E может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

Упражнение

Докажите, что

1. множество E открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;
2. множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$;
3. множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто.

Упражнение

Докажите, что

1. множество E открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;
2. множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$;
3. множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто.

Определение

Множество $\operatorname{Int} E = \{x\colon x$ – внутренняя точка множества $E\}$ называется *внутренностью* множества E.

Упражнение

Докажите, что

1. множество E открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;
2. множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$;
3. множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто.

Определение

Множество $\operatorname{Int} E = \{x \colon x$ – внутренняя точка множества $E\}$ называется *внутренностью* множества E.

Упражнение

Докажите, что для $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливы утверждения:

1. ∂E – замкнутое множество $(\overline{\partial E} = \partial E)$;
2. $E \setminus \partial E = \operatorname{Int} E$;
3. $E \cup \partial E = \overline{E}$.

Определение

Диаметром непустого *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

Определение

Диаметром непустого *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

Определение

Расстоянием между двумя непустыми *множествами* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} |x - y|.$$

Определение

Диаметром непустого *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

Определение

Расстоянием между двумя непустыми *множествами* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} |x - y|.$$

Определение

Непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом*.

Лемма

Пусть E, F – компакты в $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(E, F) > 0$.

Лемма

Пусть E, F – компакты в $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(E, F) > 0$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{dist}(E, F) = d$. Из определения расстояния между множествами следует, что существуют две последовательности

$$\{x^{(m)}\},\ \{y^{(m)}\}:\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \to\ x^{(m)} \in E,\ y^{(m)} \in F,$$

такие, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| \to d\ (m \to \infty)$.

Лемма

Пусть E, F – компакты в $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(E, F) > 0$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{dist}(E, F) = d$. Из определения расстояния между множествами следует, что существуют две последовательности

$$\{x^{(m)}\},\ \{y^{(m)}\} : \ \forall\, m \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ x^{(m)} \in E,\ y^{(m)} \in F,$$

такие, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| \to d \ (m \to \infty)$.
С помощью теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, а затем из $\{y^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}_{j=1}^{\infty}$, так что

$$x^{(m_{k_j})} \to a, \quad y^{(m_{k_j})} \to b \text{ при } j \to \infty.$$

В силу замкнутости множеств E, F имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда

$$d \leqslant |a - b| \leqslant$$

$$\leqslant |a - x^{(m_{k_j})}| + |b - y^{(m_{k_j})}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0 + 0 + d = d$$

при $j \to \infty$. Следовательно, $d = |a - b|$.

В силу замкнутости множеств E, F имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда

$$d \leqslant |a - b| \leqslant$$

$$\leqslant |a - x^{(m_{k_j})}| + |b - y^{(m_{k_j})}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0 + 0 + d = d$$

при $j \to \infty$. Следовательно, $d = |a - b|$. Но $a \neq b$, так как $E \cap F = \varnothing$. Поэтому $d > 0$.

В силу замкнутости множеств E, F имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда

$$d \leqslant |a - b| \leqslant$$

$$\leqslant |a - x^{(m_{k_j})}| + |b - y^{(m_{k_j})}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0 + 0 + d = d$$

при $j \to \infty$. Следовательно, $d = |a - b|$. Но $a \neq b$, так как $E \cap F = \varnothing$. Поэтому $d > 0$.

Упражнение

Обобщите лемму на случай, когда E – непустое замкнутое множество, F – компакт.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с его конкретным описанием

$$\Gamma = \{x(t) : \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) : \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где x_i – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции ($i = 1, \ldots, n$), называется *кривой*. При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ – *концом кривой*.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с его конкретным описанием

$$\Gamma = \{x(t): \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)): \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где x_i – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции $(i = 1, \ldots, n)$, называется *кривой*. При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ – *концом кривой*.

Определение

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, то есть такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для любых двух точек a, b которого существует кривая $\Gamma \subset G$ и соединяющая точки a и b.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с его конкретным описанием

$$\Gamma = \{x(t) : \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) : \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где x_i – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции $(i = 1, \dots, n)$, называется *кривой*. При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ – *концом кривой*.

Определение

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, то есть такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для любых двух точек a, b которого существует кривая $\Gamma \subset G$ и соединяющая точки a и b.

Определение

Замыкание $\overline{G}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутой областью*.