

Математический анализ. Лекция XXIII

Пространство \mathbb{R}^n

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

7 февраля 2014 г.

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geq 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1 $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geq 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1 $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geq 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1 $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
- 3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.
Функцию ρ называют метрикой пространства M .

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geq 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1 $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
- 3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Функцию ρ называют метрикой пространства M .

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geq 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1 $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
- 3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Функцию ρ называют метрикой пространства M .

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

С помощью расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, ε -окрестности точки, открытого и замкнутого множества, замыкания множества и другие. Мы познакомимся с этими понятиями на примере пространства \mathbb{R}^n .

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* \mathbb{R}^n называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством \mathbb{R}^n* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства \mathbb{R}^n будем называть *точкой*, а числа x_1, \dots, x_n — *координатами* точки x .

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством \mathbb{R}^n* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства \mathbb{R}^n будем называть *точкой*, а числа x_1, \dots, x_n — *координатами* точки x .

Аксиомы 1, 2 расстояния в \mathbb{R}^n очевидны.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством \mathbb{R}^n* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства \mathbb{R}^n будем называть *точкой*, а числа x_1, \dots, x_n – *координатами* точки x .

Аксиомы 1, 2 расстояния в \mathbb{R}^n очевидны.

В \mathbb{R}^n можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим образом: при $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Тогда \mathbb{R}^n становится не просто метрическим, а линейным пространством, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством \mathbb{R}^n* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства \mathbb{R}^n будем называть *точкой*, а числа x_1, \dots, x_n — *координатами* точки x .

Аксиомы 1, 2 расстояния в \mathbb{R}^n очевидны.

В \mathbb{R}^n можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим образом: при $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Тогда \mathbb{R}^n становится не просто метрическим, а линейным пространством, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*.

По определению $x - y = x + (-1)y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма (неравенство Коши–Буняковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq |x| |y|.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|x| > 0$, $|y| > 0$. При $a, b \geq 0$ имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма (неравенство Коши–Буняковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq |x| |y|.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|x| > 0$, $|y| > 0$. При $a, b \geq 0$ имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заменяя a на $a\sqrt{t}$, b – на $\frac{b}{\sqrt{t}}$ при произвольном $t > 0$, имеем

$$ab \leq \frac{a^2 t}{2} + \frac{b^2}{2t}.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + |y|^2.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i , получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Это неравенство также называют *неравенством треугольника*.

Проверим аксиому 3 расстояния.

Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу неравенства Минковского

$$|x' + y'| \leq |x'| + |y'|, \text{ то есть } |x - z| \leq |x - y| + |y - z|,$$

Проверим аксиому 3 расстояния.

Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу неравенства Минковского

$$|x' + y'| \leq |x'| + |y'|, \text{ то есть } |x - z| \leq |x - y| + |y - z|,$$

что лишь обозначением отличается от неравенства

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Понятие расстояния в \mathbb{R}^n дает возможность ввести понятия ε -окрестности точки и предельного перехода в \mathbb{R}^n .

Понятие расстояния в \mathbb{R}^n дает возможность ввести понятия ε -окрестности точки и предельного перехода в \mathbb{R}^n .

Определение

При $\varepsilon > 0$ ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще *шаром*, или *открытым шаром* в \mathbb{R}^n радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a .

Понятие расстояния в \mathbb{R}^n дает возможность ввести понятия ε -окрестности точки и предельного перехода в \mathbb{R}^n .

Определение

При $\varepsilon > 0$ ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще *шаром*, или *открытым шаром* в \mathbb{R}^n радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a .

Определение

Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ точек $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ и пишут $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a$ или $x^{(m)} \rightarrow a$ при $m \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall m \geq m_\varepsilon \rightarrow |x^{(m)} - a| < \varepsilon.$$

Теорема

Последовательность $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ точек из \mathbb{R}^n сходится к точке $a \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, \dots, n$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$ и a_k – координаты точек $x^{(m)}$ и a соответственно.

Теорема

Последовательность $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ точек из \mathbb{R}^n сходится к точке $a \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, \dots, n$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$ и a_k – координаты точек $x^{(m)}$ и a соответственно.

Доказательство очевидно, если воспользоваться неравенством

$$|x_k^{(m)} - a_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} = |x^{(m)} - a|.$$

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists R > 0: E \subset U_R(\vec{0})$.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists R > 0: E \subset U_R(\vec{0})$.

Определение

Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений ограничено, то есть

$$\exists R > 0 : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow |x^{(m)}| < R.$$

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ – ограниченная последовательность. Тогда при любом k , $1 \leq k \leq n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\left\{ x_1^{(m_j^{(1)})} \right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ – ограниченная последовательность. Тогда при любом k , $1 \leq k \leq n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена.

Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\left\{x_1^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Рассмотрим последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$. По теореме

Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{m_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(2)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, \dots , $\{m_j^{(n)}\}$, причем каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\left\{ x_k^{(m_j^{(k)})} \right\}_{j=1}^{\infty}$ сходятся при $k = 1, \dots, n$.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, \dots , $\{m_j^{(n)}\}$, причем каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(k)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходятся при $k = 1, \dots, n$.

Но тогда сходятся и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, \dots, n$, как подпоследовательности сходящихся последовательностей. Следовательно, последовательность $\left\{x^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится, что и требовалось показать.

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Упражнение

Докажите, что

- 1 пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;
- 2 объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

Лемма

ε -окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n .

Лемма

ε -окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.

Лемма

ε -окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.

Пусть $y \in U_\delta(x)$, то есть $|y - x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y - a| \leq |y - x| + |x - a| < \delta + r = \varepsilon,$$

то есть $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x , называется *окрестностью точки x* и обозначается $U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x , называется *окрестностью точки x* и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε -окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x , называется *окрестностью точки x* и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε -окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε -окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x , называется *окрестностью точки x* и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε -окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε -окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться обозначения проколотых окрестностей:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \dot{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow E \cap \dot{U}_\varepsilon(a) \neq \emptyset.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow E \cap \dot{U}_\varepsilon(a) \neq \emptyset.$$

Упражнение

Докажите эквивалентность этих определений.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

- 1 объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
- 2 пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

- 1 объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
- 2 пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\bar{E} = E \cup \{x : x \in \mathbb{R}^n, x \text{ — предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества E* .

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

- 1 объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
- 2 пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\bar{E} = E \cup \{x : x \in \mathbb{R}^n, x \text{ — предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества E* .

Упражнение

Множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $E = \bar{E}$.

Лемма

Замыкание \bar{E} множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Лемма

Замыкание \bar{E} множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \emptyset$ и a – предельная точка множества \bar{E} . Требуется доказать, что $a \in \bar{E}$.

Лемма

Замыкание \bar{E} множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \emptyset$ и a – предельная точка множества \bar{E} . Требуется доказать, что $a \in \bar{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} : a \neq y^{(m)} \in \bar{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \bar{E}$.

Лемма

Замыкание \bar{E} множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \emptyset$ и a – предельная точка множества \bar{E} . Требуется доказать, что $a \in \bar{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} : a \neq y^{(m)} \in \bar{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \bar{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\} : a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Лемма

Замыкание \bar{E} множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \emptyset$ и a – предельная точка множества \bar{E} . Требуется доказать, что $a \in \bar{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} : a \neq y^{(m)} \in \bar{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \bar{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\} : a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin E$, то $y^{(m)}$ – предельная точка множества E (поскольку $y^{(m)} \in \bar{E}$). В этом случае через $x^{(m)}$ обозначим такую точку множества E , что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{\varepsilon_m}{2}$.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon_m}{2} &\leq |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leq |x^{(m)} - a| \leq \\ &\leq |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m. \end{aligned}$$

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon_m}{2} &\leq |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leq |x^{(m)} - a| \leq \\ &\leq |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E , что и требовалось показать.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon_m}{2} &\leq |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leq |x^{(m)} - a| \leq \\ &\leq |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E , что и требовалось показать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде:

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$