Математический анализ. Лекция XXI
Кривизна

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

20 ноября 2013 г.

Лемма

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ постоянна по модулю:

$$|\vec{r}(t)| = C \quad \text{при} \quad t \in U(t_0),$$

и пусть существует $\vec{r}'(t_0)$. Тогда $\vec{r}'(t_0) \perp \vec{r}(t_0)$.

Лемма

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ постоянна по модулю:

$$|\vec{r}(t)| = C \quad \text{при} \quad t \in U(t_0),$$

и пусть существует $\vec{r}'(t_0)$. Тогда $\vec{r}'(t_0) \perp \vec{r}(t_0)$.

Доказательство. Дифференцируя скалярное произведение $(\vec{r}(t), \vec{r}(t)) = |\vec{r}(t)|^2 = C^2$, получаем, что

$$(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) + (\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0)) = 2(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) = 0.$$

Определение

Пусть Γ – спрямляемая кривая,

$$\Gamma = \{\vec{r}(s) : \ 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где s – переменная длина ее дуги, и пусть $s_0 \in [0, S]$. Пусть также существуют $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ на $U(s_0) \cap [0, S]$ и $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в точке s_0.
Тогда $k = k(s_0) = \left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}(s_0)\right|$ называется *кривизной* кривой Γ в точке $(s_0, \vec{r}(s_0))$.
Если $s_0 = 0$ или $s_0 = S$, то производные понимаются как односторонние.

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем).

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем). В самом деле, поскольку $\vec{t}$ – единичный вектор, то $|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}(s_0 + \Delta s) - \vec{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на Δs.

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем). В самом деле, поскольку $\vec{t}$ – единичный вектор, то $|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}(s_0 + \Delta s) - \vec{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на Δs. Если величину угла между векторами $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, выраженную в радианах, обозначить через $\varphi = \varphi(\Delta s)$, то

$$|\Delta\vec{t}| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \sim \varphi \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0 + 0.$$

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем). В самом деле, поскольку $\vec{t}$ – единичный вектор, то $|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}(s_0 + \Delta s) - \vec{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на Δs. Если величину угла между векторами $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, выраженную в радианах, обозначить через $\varphi = \varphi(\Delta s)$, то

$$|\Delta\vec{t}| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \sim \varphi \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0 + 0.$$

Тогда

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0+0} \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0+0} \frac{\varphi(\Delta s)}{\Delta s}.$$

Определение

Величина $R = \dfrac{1}{k} \leqslant +\infty$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*.

Определение

Величина $R = \dfrac{1}{k} \leqslant +\infty$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*.

Упражнение

Проверить, что в каждой точке окружности ее радиус кривизны совпадает с радиусом этой окружности.

Теорема

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ – гладкая дважды дифференцируемая кривая. Тогда в каждой ее точке существует кривизна.

Теорема

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ – гладкая дважды дифференцируемая кривая. Тогда в каждой ее точке существует кривизна.

Доказательство.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}.$$

Теорема

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ – гладкая дважды дифференцируемая кривая. Тогда в каждой ее точке существует кривизна.

Доказательство.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}.$$

Следовательно, $\exists\, k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{|s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'|}{s'^3}$.

Выведем другое выражение для кривизны k.

Выведем другое выражение для кривизны k. Поскольку в силу леммы $\dfrac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}$, то имеем

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\left[\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{t}\right]\right| = \left|\left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right]\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}, \frac{\vec{r}'}{s'}\right]\right| = \frac{|[\vec{r}'', \vec{r}']|}{s'^3},$$

Выведем другое выражение для кривизны k. Поскольку в силу леммы $\dfrac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}$, то имеем

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\left[\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{t}\right]\right| = \left|\left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right]\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}, \frac{\vec{r}'}{s'}\right]\right| = \frac{|[\vec{r}'', \vec{r}']|}{s'^3},$$

то есть

$$k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{\left| det \left\| \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\| \right|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3}.$$

Если $k = \left| \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Если $k = \left| \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется *единичным вектором главной нормали*.

Если $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется *единичным вектором главной нормали*.

Определение

Нормалью к кривой в данной точке называется всякая прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.

Если $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется *единичным вектором главной нормали*.

Определение

Нормалью к кривой в данной точке называется всякая прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.
Нормаль к кривой, параллельная $\vec{n}$, называется *главной нормалью*.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S\}$, и пусть в точке $(s_0, \vec{r}(s_0))$ существует $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s_0 + \Delta s) - \vec{r}(s_0) =$$

$$= \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}(\Delta s)^2 + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

при $\Delta s \to 0$.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S\}$, и пусть в точке $(s_0, \vec{r}(s_0))$ существует $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s_0 + \Delta s) - \vec{r}(s_0) =$$

$$= \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}(\Delta s)^2 + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

при $\Delta s \to 0$.

То есть

$$\Delta\vec{r} = (\Delta s)\vec{t} + \frac{1}{2}k(\Delta s)^2\vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S\}$, и пусть в точке $(s_0, \vec{r}(s_0))$ существует $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s_0 + \Delta s) - \vec{r}(s_0) =$$

$$= \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}(\Delta s)^2 + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

при $\Delta s \to 0$.
То есть

$$\Delta\vec{r} = (\Delta s)\vec{t} + \frac{1}{2}k(\Delta s)^2\vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Это равенство показывает, что в окрестности данной точки кривая отклоняется от своей касательной в сторону вектора $\vec{n}$ с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Определение

Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Определение

Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Последнюю формулу для $\Delta\vec{r}$ можно интерпретировать так: в окрестности данной точки кривая лежит в соприкасающейся плоскости с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\vec{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'}{s'}$ и $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}$, а значит, и вектору $\vec{r}''$ $(s' = |\vec{r}'| \neq 0)$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\vec{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'}{s'}$ и $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}$, а значит, и вектору $\vec{r}''$ $(s' = |\vec{r}'| \neq 0)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\vec{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'}{s'}$ и $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}$, а значит, и вектору $\vec{r}''$ $(s' = |\vec{r}'| \neq 0)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Если в данной точке кривой $k = 0$, то всякая плоскость, содержащая касательную в этой точке, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Определение

Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной ее точке и находящаяся на расстоянии $R = \dfrac{1}{k}$ от этой точки в направлении вектора $\vec{n}$ главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в данной точке кривой.

Определение

Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной ее точке и находящаяся на расстоянии $R = \dfrac{1}{k}$ от этой точки в направлении вектора $\vec{n}$ главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в данной точке кривой.

Центр кривизны лежит в соприкасающейся плоскости.

Определение

Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной ее точке и находящаяся на расстоянии $R = \dfrac{1}{k}$ от этой точки в направлении вектора $\vec{n}$ главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в данной точке кривой.

Центр кривизны лежит в соприкасающейся плоскости.
Если $\vec{r}$ – радиус-вектор точки кривой, то радиус-вектор центра кривизны в этой точке $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{n} = \vec{r} + \dfrac{1}{k^2}\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Отсюда имеем

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3},$$

где $s' = |\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $s'' = \dfrac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$.

Определение

Кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$, описывающая множество центров кривизны данной кривой Γ, называется ее *эволютой*.
Сама кривая Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Кривая Γ вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Ее уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Кривая Γ вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Ее уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Будем считать плоскую кривую Γ гладкой. Радиус-вектор $\vec{r}$ кривой Γ лежит в плоскости кривой, как и векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{n}$.

Кривая Γ вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Ее уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) :\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Будем считать плоскую кривую Γ гладкой. Радиус-вектор $\vec{r}$ кривой Γ лежит в плоскости кривой, как и векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{n}$.
Пусть α – угол между единичным вектором касательной к кривой и осью Ox. Тогда

$$\vec{t} = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\sin\alpha, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = (-\vec{\imath}\sin\alpha + \vec{\jmath}\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = |-\vec{\imath}\sin\alpha + \vec{\jmath}\cos\alpha| \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Радиус-вектор центра кривизны при $k > 0$

$$\vec{\rho} = (\xi, \eta), \quad \text{где} \begin{cases} \xi = x + R^2 \dfrac{d^2 x}{ds^2}, \\ \eta = y + R^2 \dfrac{d^2 y}{ds^2}, \end{cases}$$

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

В случае, когда кривая Г является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'^2(x)\,dx^2, \quad ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx,$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

В случае, когда кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'^2(x)\,dx^2, \quad ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx,$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

уравнения эволюты при $k > 0$:

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{1 + y'^2}{y''} y', \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}. \end{cases}$$

Определение

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ – гладкая дважды непрерывно дифференцируемая кривая, и пусть $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \dfrac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \neq \vec{0}$. Тогда вектор $\vec{\beta} = [\vec{t}, \vec{n}]$ называется *единичным вектором бинормали* кривой Γ.

Определение

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ – гладкая дважды непрерывно дифференцируемая кривая, и пусть $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \dfrac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \neq \vec{0}$. Тогда вектор $\vec{\beta} = [\vec{t}, \vec{n}]$ называется *единичным вектором бинормали* кривой Γ.
Прямая с направляющим вектором $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t_0)$, проходящая через точку $\vec{r}(t_0)$, называется *бинормалью* кривой Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$.

Определение

Сопровождающим трехгранником Френе кривой Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ называется трехгранник, образованный векторами $\vec{t}(t_0)$, $\vec{n}(t_0)$, $\vec{\beta}(t_0)$, отложенными от точки $\vec{r}(t_0)$.

Определение

Сопровождающим трехгранником Френе кривой Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ называется трехгранник, образованный векторами $\vec{t}(t_0)$, $\vec{n}(t_0)$, $\vec{\beta}(t_0)$, отложенными от точки $\vec{r}(t_0)$.

Сопровождающий трехгранник задает следующие три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку $\vec{r}(t_0)$:

1. соприкасающуюся плоскость, ортогональную вектору $\vec{\beta}$ бинормали,
2. *нормальную плоскость*, ортогональную вектору $\vec{t}$ касательной,
3. *спрямляющую плоскость*, ортогональную вектору $\vec{n}$ главной нормали.

Если Г – гладкая трижды непрерывно дифференцируемая кривая, то справедливы *формулы Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{\partial\vec{n}}{\partial s} = -k\vec{t} + \varkappa\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{n}.$$

Если Γ – гладкая трижды непрерывно дифференцируемая кривая, то справедливы *формулы Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = -k\vec{t} + \varkappa\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{n}.$$

Первая из формул Френе доказана ранее.

Если Γ – гладкая трижды непрерывно дифференцируемая кривая, то справедливы *формулы Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{\partial\vec{n}}{\partial s} = -k\vec{t} + \varkappa\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{n}.$$

Первая из формул Френе доказана ранее.
Для вывода третьей формулы Френе, дифференцируя векторное произведение $\vec{\beta} = [\vec{t}, \vec{n}]$, получаем

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{n}\right] + \left[\vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right] = [k\vec{n}, \vec{n}] + \left[t, \frac{d\vec{n}}{ds}\right] = \left[\vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right].$$

Отсюда следует, что вектор $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ ортогонален вектору $\vec{t}$ и вектору $\vec{\beta}$, так что $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{n}$ при некотором $\varkappa \in \mathbb{R}$. При этом коэффициент $\varkappa$ называется *кручением кривой* Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$. Геометрический смысл $|\varkappa|$ состоит в том, что $|\varkappa|$ является мгновенной угловой скоростью поворота бинормали (или, что то же, поворота соприкасающейся плоскости), если параметр s считать временем. Это выясняется так же, как геометрический смысл кривизны кривой.

Отсюда следует, что вектор $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}$ ортогонален вектору $\vec{t}$ и вектору $\vec{\beta}$, так что $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{n}$ при некотором $\varkappa \in \mathbb{R}$. При этом коэффициент $\varkappa$ называется *кручением кривой* Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$. Геометрический смысл $|\varkappa|$ состоит в том, что $|\varkappa|$ является мгновенной угловой скоростью поворота бинормали (или, что то же, поворота соприкасающейся плоскости), если параметр s считать временем. Это выясняется так же, как геометрический смысл кривизны кривой.

Вторая формула Френе легко выводится с помощью первой и третьей формул Френе.