Математический анализ. Лекция XIV

Правило Лопиталя

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

16 октября 2013 г.

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю или оба стремятся к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ соответственно. Нахождение этого предела (если он существует) называют *раскрытием неопределенности*. Одним из приемов раскрытия неопределенности является способ, называемый *правилом Лопиталя* и состоящий в том, что вычисление предела отношения функций заменяется вычислением предела отношения их производных.

Теорема

Пусть

1. функции f, g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $b - a < \infty$;
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;
3. $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
4. существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема

Пусть

1. функции f, g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $b - a < \infty$;
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;
3. $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
4. существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим f, g в точке a, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции f, g непрерывны на $[a; b)$. По теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}, \quad a < c(x) < x < b.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = A,$$

так как $\lim\limits_{x\to a+0} c(x) = a$ и $c(x) \neq a$.

Теорема

Пусть

1. функции f, g дифференцируемы на $(a, +\infty)$, $a > 0$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
3. $g' \neq 0$ на $(a, +\infty)$;
4. существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ при $t\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to0+0}\frac{\dfrac{d}{dt}f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{d}{dt}g\left(\dfrac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}=A.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to0+0}\frac{\dfrac{d}{dt}f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{d}{dt}g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По предыдущей теореме $\exists \lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = A$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{\dfrac{d}{dt}f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{d}{dt}g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По предыдущей теореме $\exists \lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = A$.

Отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема

Пусть

1. функции f, g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $-\infty < a < b < \infty$;
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$;
3. $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
4. существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, x_\varepsilon \in (a; b):\; \forall\, x \in (a, x_\varepsilon) \;\to\; \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, x_\varepsilon \in (a;b):\; \forall\, x \in (a, x_\varepsilon) \;\to\; \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\exists\, c \in (a, x_\varepsilon):\; \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, x_\varepsilon \in (a; b) : \;\forall\, x \in (a, x_\varepsilon) \;\to\; \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\exists\, c \in (a, x_\varepsilon) : \;\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, что при $a < x < a + \delta < x_\varepsilon < b$:

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда для $x \in (a; a+\delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Тогда для $x \in (a; a+\delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}; \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Второй множитель принадлежит $U_\varepsilon(A)$.

Тогда для $x \in (a; a+\delta)$:

$$\frac{f(x)-f(x_\varepsilon)}{g(x)-g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}; \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Второй множитель принадлежит $U_\varepsilon(A)$. Следовательно, при некотором $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ (таком, что $\alpha \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in U_\alpha(A)$. Значит, $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

Тогда для $x \in (a; a+\delta)$:

$$\frac{f(x)-f(x_\varepsilon)}{g(x)-g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}; \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Второй множитель принадлежит $U_\varepsilon(A)$. Следовательно, при некотором $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ (таком, что $\alpha \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in U_\alpha(A)$. Значит, $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание

Эти теоремы остаются в силе в случаях предельных переходов $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ с соответствующими изменениями их формулировок.

Пример

Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Пример

Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Здесь первое равенство написано при условии, что предел его правой части существует, и становится оправданным после доказательства существования этого предела.

Пример

Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Пример

Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Каждая из них сводится к уже рассмотренным. Например,

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{\infty}{1/0};$$

$$+\infty - (+\infty) = \ln e^{+\infty} - \ln e^{+\infty} = \ln \frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}};$$

$$(+0)^0 = e^{0 \ln +0};$$

$$(+\infty)^0 = e^{0 \ln +\infty};$$

$$1^\infty = e^{\infty \ln 1}.$$

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0\cdot\infty, \quad +\infty-(+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Каждая из них сводится к уже рассмотренным. Например,

$$0\cdot\infty=\frac{0}{1/\infty}=\frac{\infty}{1/0};$$

$$+\infty-(+\infty)=\ln e^{+\infty}-\ln e^{+\infty}=\ln\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}};$$

$$(+0)^0=e^{0\ln +0};$$

$$(+\infty)^0=e^{0\ln +\infty};$$

$$1^\infty=e^{\infty\ln 1}.$$

Упражнение

Найдите $\lim_{x\to 0+0} x^x$.