

Математический анализ. Лекция XIV

Правило Лопиталья

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

16 октября 2013 г.

Свойства дифференцируемых функций

Правило Лопиталья

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю или оба стремятся к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно. Нахождение этого предела (если он существует) называют *раскрытием неопределенности*. Одним из приемов раскрытия неопределенности является способ, называемый *правилом Лопиталья* и состоящий в том, что вычисление предела отношения функций заменяется вычислением предела отношения их производных.

Теорема

Пусть

- 1 функции f , g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $b - a < \infty$;
- 2 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$;
- 3 $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
- 4 существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема

Пусть

- 1 функции f, g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $b - a < \infty$;
- 2 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$;
- 3 $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
- 4 существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим f, g в точке a , положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции f, g непрерывны на $[a; b)$. По теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}, \quad a < c(x) < x < b.$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}, \varepsilon > 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = A,$$

так как $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$ и $c(x) \neq a$.

Теорема

Пусть

- 1 функции f, g дифференцируемы на $(a, +\infty)$, $a > 0$;
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
- 3 $g' \neq 0$ на $(a, +\infty)$;
- 4 существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = A.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции

$f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По предыдущей теореме $\exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = A$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции

$f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По предыдущей теореме $\exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = A$.

Отсюда следует, что $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема

Пусть

- 1 функции f , g дифференцируемы на интервале $(a; b)$, $-\infty < a < b < \infty$;
- 2 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \pm\infty$;
- 3 $g' \neq 0$ на $(a; b)$;
- 4 существует $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x_\varepsilon \in (a; b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x_\varepsilon \in (a; b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\exists c \in (a, x_\varepsilon) : \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x_\varepsilon \in (a; b) : \forall x \in (a, x_\varepsilon) \rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\exists c \in (a, x_\varepsilon) : \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, что при $a < x < a + \delta < x_\varepsilon < b$:

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

Тогда для $x \in (a; a + \delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Тогда для $x \in (a; a + \delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}; \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)$. Второй множитель принадлежит $U_\varepsilon(A)$.

Тогда для $x \in (a; a + \delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}; \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)$. Второй множитель принадлежит $U_\varepsilon(A)$. Следовательно, при некотором $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ (таком, что $\alpha \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) $\frac{f(x)}{g(x)} \in U_\alpha(A)$. Значит, $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

Тогда для $x \in (a; a + \delta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Первый множитель принадлежит интервалу $\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}; \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)$. Вторым множителем принадлежит $U_\varepsilon(A)$. Следовательно, при некотором $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ (таком, что $\alpha \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) $\frac{f(x)}{g(x)} \in U_\alpha(A)$. Значит, $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание

Эти теоремы остаются в силе в случаях предельных переходов $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ с соответствующими изменениями их формулировок.

Пример

Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}, \alpha > 0$.

Пример

Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Здесь первое равенство написано при условии, что предел его правой части существует, и становится оправданным после доказательства существования этого предела.

Пример

Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Пример

Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \end{aligned}$$

Правило Лопиталья помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Правило Лопиталья помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Каждая из них сводится к уже рассмотренным. Например,

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{\infty}{1/0};$$

$$+\infty - (+\infty) = \ln e^{+\infty} - \ln e^{+\infty} = \ln \frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}};$$

$$(+0)^0 = e^{0 \ln +0};$$

$$(+\infty)^0 = e^{0 \ln +\infty};$$

$$1^\infty = e^{\infty \ln 1}.$$

Правило Лопиталья помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Каждая из них сводится к уже рассмотренным. Например,

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{\infty}{1/0};$$

$$+\infty - (+\infty) = \ln e^{+\infty} - \ln e^{+\infty} = \ln \frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}};$$

$$(+0)^0 = e^{0 \ln +0};$$

$$(+\infty)^0 = e^{0 \ln +\infty};$$

$$1^\infty = e^{\infty \ln 1}.$$

Упражнение

Найдите $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$.