Математический анализ. Лекция XIII

Формула Тейлора

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

15 октября 2013 г.

Теорема Ферма

Пусть функция f определена в $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма

Пусть функция f определена в $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) = \min\limits_{U(x_0)} f$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем соответственно $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b): \; f'(c) = 0$.

Теорема Ролля

Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, $f(a)=f(b)$. Тогда $\exists\, c \in (a;b): \ f'(c)=0$.

Доказательство. Случай $f \equiv \mathrm{const}$ тривиален. Будем считать далее, что $f \neq \mathrm{const}$. По теореме Вейерштрасса в некоторых точках отрезка $[a;b]$ функция f принимает максимальное и минимальное значения. По крайней мере одна из этих точек лежит на интервале $(a;b)$, так как $\min\limits_{[a;b]} f < \max\limits_{[a;b]} f$.

Теорема Ролля

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b): \;\; f'(c) = 0$.

Доказательство. Случай $f \equiv \mathrm{const}$ тривиален. Будем считать далее, что $f \neq \mathrm{const}$. По теореме Вейерштрасса в некоторых точках отрезка $[a; b]$ функция f принимает максимальное и минимальное значения. По крайней мере одна из этих точек лежит на интервале $(a; b)$, так как $\min\limits_{[a;b]} f < \max\limits_{[a;b]} f$. Но тогда по теореме Ферма производная f' в этой точке равна нулю, что и требовалось доказать.

Теорема Лагранжа

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b): \ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема Лагранжа

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b): \ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доказательство. Для доказательства построим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число λ выберем так, чтобы F удовлетворяла условию: $F(a) = F(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \text{то есть} \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Лагранжа

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b):\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доказательство. Для доказательства построим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число λ выберем так, чтобы F удовлетворяла условию: $F(a) = F(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \text{то есть} \quad \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Очевидно, для F выполнены все условия теоремы Ролля. По теореме Ролля для функции F получаем, что

$$\exists\, c \in (a; b):\ F'(c) = 0, \quad \text{то есть} \quad f'(c) - \lambda = 0,$$

где $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Отсюда следует утверждение теоремы Лагранжа.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a; b),$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа*.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a; b),$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Перепишем ее в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad c \in (a; b),$$

откуда легко понять геометрический смысл утверждения теоремы Лагранжа: найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что касательная к графику функции f в точке $(c, f(c))$ параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad c \in (a; b),$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Перепишем ее в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad c \in (a; b),$$

откуда легко понять геометрический смысл утверждения теоремы Лагранжа: найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что касательная к графику функции f в точке $(c, f(c))$ параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Упражнение

Докажите, что если для непрерывной в точке x_0 функции f существует $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то существует $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Теорема Коши

Пусть функции f, g непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$, при котором справедлива *формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Коши

Пусть функции f, g непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$, при котором справедлива *формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке интервала $(a; b)$.

Теорема Коши

Пусть функции f, g непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$, при котором справедлива *формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке интервала $(a; b)$.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a; b]$. Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, то есть $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Теорема Коши

Пусть функции f, g непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$, при котором справедлива *формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке интервала $(a; b)$.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a; b]$. Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, то есть $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

При выбранном таким образом λ функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists\, c \in (a; b): \; F'(c) = 0$.

Теорема Коши

Пусть функции f, g непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, $g' \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$, при котором справедлива *формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке интервала $(a; b)$.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a; b]$. Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, то есть $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

При выбранном таким образом λ функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists\, c \in (a; b): \; F'(c) = 0$. Последнее равенство переписывается в виде

$$f'(c) - \lambda g'(c) = 0, \quad \text{то есть} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, когда $g(x) = x$.

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(f, x) = P_n(f, x) + r_n(f, x),$$

которое называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0. При этом $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется *k-ым членом* формулы Тейлора, $P_n(f, x)$ – *многочленом Тейлора*, $r_n(f, x)$ – *остаточным членом* формулы Тейлора (после n-го члена).

Лемма

Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, f' на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда при $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x).$$

Лемма

Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, f' на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда при $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x).$$

Доказательство.

$$(r_n(f,x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' =$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = r_{n-1}(f',x).$$

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.
Предположим, что утверждение теоремы верно при $n - 1 \geqslant 1$ вместо n и покажем, что оно верно в приведенной форме. Используя теорему Лагранжа и предыдущую лемму, имеем

$$r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = r_{n-1}(f', c)(x - x_0),$$

где $x_0 < c < x$ или $x < c < x_0$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.
Предположим, что утверждение теоремы верно при $n - 1 \geqslant 1$ вместо n и покажем, что оно верно в приведенной форме. Используя теорему Лагранжа и предыдущую лемму, имеем

$$r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = r_{n-1}(f', c)(x - x_0),$$

где $x_0 < c < x$ или $x < c < x_0$.
По предположению индукции $r_{n-1}(f', c) = o((c - x_0)^{n-1}) = o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$r_n(f, x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

что и требовалось показать.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть $x > x_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0; x]$, и пусть существует $f^{(n+1)}$ на интервале $(x_0; x)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c \in (x_0; x)$.

Доказательство будем проводить по индукции, считая для определенности $x > x_0$. При $n = 0$ теорема совпадает с теоремой Лагранжа.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть $x > x_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0; x]$, и пусть существует $f^{(n+1)}$ на интервале $(x_0; x)$. Тогда справедлива формула Тейлора, в которой

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c \in (x_0; x)$.

Доказательство будем проводить по индукции, считая для определенности $x > x_0$. При $n = 0$ теорема совпадает с теоремой Лагранжа. Предположим, что утверждение верно при $n - 1$ вместо n и установим, что оно верно в приведенном виде. Используя теорему Коши о среднем и лемму, имеем

$$\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{r_{n-1}(f', c)}{(n+1)(c - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(d)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!},$$

где $x_0 < d < c < x$, а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции.

Теорема единственности

Пусть на $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_n = b_n$.

Теорема единственности

Пусть на $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции f из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

следует, что $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.
Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$.

Теорема единственности

Пусть на $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции f из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

следует, что $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.
Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$.
Учитывая это, поделим его почленно на $x - x_0$. Получим

$$c_1 + c_2(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}) \text{ при } x \to x_0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_1 = 0$.

Теорема единственности

Пусть на $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции f из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

следует, что $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.
Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$. Учитывая это, поделим его почленно на $x - x_0$. Получим

$$c_1 + c_2(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}) \text{ при } x \to x_0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_1 = 0$. Учитывая это и деля обе части последнего равенства на $x - x_0$, после перехода к пределу получаем, что $c_2 = 0$. Поступая так дальше, приходим к равенствам $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, и пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда это разложение является разложением f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Следствие

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, и пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда это разложение является разложением f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Упражнение

Пусть для функции f выполняется равенство из следствия. Влечет ли это за собой существование $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots f^{(n)}(x_0)$.