В настоящей работе рассматриваются некоторые обобщения монотонных операторов - (M) операторы или операторы монотонного типа. Изучаются нелинейные операторные уравнения и вариационные неравенства с операторами типа (M). Доказываются некоторые некоэрцитивные условия разрешимости для таких уравнений и вариационных неравенств. Строятся аппроксимационные схемы для приближенного решения обобщенных краевых задач и доказываются оценки скорости сходимости для них. Показывается, что метод фиктивных областей решения краевых задач математической физики с эллиптическими дифференциальными операторами является некоторой аппроксимацией обобщенной краевой задачи в банаховом пространстве.

Виктор Трушин

В.Б.Трушин окончил МФТИ в 1974 году, аспирантуру МФТИ в 1977 г. Научный руководитель - академик В.С. Владимиров. Основу данной книги составляет кандидатская диссертация автора "Об одной общей схеме метода фиктивных областей и ее приложениях" (МИАН, 1992 г.). В настоящее время доцент кафедры высшей математики МФТИ, зам. директора "Физтех-центра".

978-3-659-40671-3

Операторы монотонного типа

Трушин

Виктор Трушин

Операторы монотонного типа

Нелинейные уравнения, вариационные неравенства, обобщенная краевая задача, метод фиктивных областей, аппроксимации

LAP LAMBERT Academic Publishing

Виктор Трушин

Операторы монотонного типа

Виктор Трушин

Операторы монотонного типа

Нелинейные уравнения, вариационные неравенства, обобщенная краевая задача, метод фиктивных областей, аппроксимации

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-40671-3

Zugl. / Утверд.: Москва, Математический Институт РАН, 1992

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Краткая справка

В настоящей работе вводятся и изучаются локальные аналоги монотонных операторов, которые мы назовем операторами монотонного типа – (M) операторами. Они являются обобщениями условий монотонности (Г. Минти [37]), α_0 (И.В. Скрыпник [20]), свойства (M) (Ж.-Л. Лионс [14]), псевдомонотонности (Х. Брезиса [32]), полумонотонности (М.М. Вайнберг [2]), полуограниченной вариации (Ю.А. Дубинский [11]), операторов вариационного исчисления (Ж.–Л. Лионс [14]) и операторов типа (S_+) (Ф. Браудер [34]), вводятся и исследуются некоторые условия ограниченности (O), заменяющие при доказательстве теорем существования решений операторных уравнений условие ограниченности операторов. Доказываются некоторые теоремы существования решений операторных уравнений и вариационных неравенств с операторами монотонного типа. Исследуется сходимость с оценкой скорости для некоторых аппроксимационных схем. Результаты применяются для построения общей схемы метода фиктивных областей для некоторого класса краевых задач и вариационных неравенств. Основу этой работы составляет результаты диссертации автора [26], аннонсированные в работе [24].

Известно ([9],[10],[12],[14]), что многие краевые задачи для эллиптических уравнений можно рассматривать как вариационные неравенства (ВН) в банаховом пространстве E: найти $u \in K$ такой, что

$$(Au, v-u) \geqslant 0, \ \forall v \in K, \tag{1.1}$$

где K – замкнутое выпуклое подмножество из E, A – оператор, действующий из пространства E в сопряженное пространство E^*, (f, u) – билинейная форма из $E^* \times E$ в $\mathbb{R}$.

Далее мы будем предполагать, что множество K задается в виде

$$K = \{u \in E : Fu = 0\}, \tag{1.2}$$

где $F : E \to E^*$ – монотонный деминепрерывный оператор. Последнее предположение не ограничивает общности рассмотрения (см., например, [14]).

Если множество K совпадает с E, то ВН (1.1) эквивалентно операторному уравнению: найти u из E такой, что

$$Au = 0. \tag{1.3}$$

Если $K = \psi + N$, где $\psi \in E$, N – замкнутое подпространство из E, то ВН (1.1) эквивалентно задаче: найти $u \in \psi + N$ такой, что

$$(Au, v) = 0 \ \ \forall v \in N. \tag{1.4}$$

Однородные краевые задачи математической физики могут быть реализованы в виде операторного уравнения (1.3), а неоднородные краевые задачи и некоторые задачи типа задачи дифракции представляются в абстрактной формулировке в виде задачи (1.4). Отметим, что уравнение (1.3) является частным случаем задачи (1.4) при $N = E$. Поэтому ниже задача (1.4) будет называться обобщенной краевой задачей.

Рассмотрим семейство уравнений

$$Fu + \varepsilon Au = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.5}$$

Если оператор A коэрцитивен и псевдомонотонен, то (см. [14]) уравнение (1.5) имеет решение $u = u_\varepsilon$, и любая слабо предельная точка множества $\{u_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$ является решением (1.1).

Ниже мы покажем, что уравнение (1.5) при $K = \psi + N$, где $\psi \in E$, а N – замкнутое подпространство в E, является реализацией абстрактной схемы метода "фиктивных"областей (МФО).

МФО является одним из методов решения краевых задач математической физики. Этот метод широко известен в литературе. Его описание, обоснование и библиографию можно найти в монографии Марчука Г.И. [16]. Подробный обзор и более полную библиографию можно найти в работе Войцеховского С.А., Гаврилюка И.П. и Макарова В.Л. [6], [7]. В этой работе дается классификация схем МФО, основанная на хронологическом принципе. Все эти схемы можно отнести к методу регуляризации или методу введения искусственной вязкости. Метод состоит в том, что в уравнение добавляется оператор с малым параметром $\varepsilon > 0$. В результате получают разрешимую задачу. Далее устанавливают равномерные по ε оценки скорости сходимости решений этих задач к решению исходной задачи, на основе которых совершают предельный переход при $\varepsilon \to +0$.

Суть МФО заключается в следующем. Пусть Ω_0 – параллелепипед с ребрами параллельными осям координат и область $\Omega \subset \Omega_0$, $\Omega_1 = \Omega_0 \backslash \overline{\Omega}$. Рассмотрим в Ω первую однородную краевую задачу для сильно эллиптического линейного оператора P второго порядка $Pu = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$.

Метод фиктивных областей для рассматриваемой задачи строится так: исходная задача в области Ω заменяется на однородную краевую задачу Дирихле в Ω_0

$P_\varepsilon u = F$, где F – продолженная нулем вне Ω функция f и $P_\varepsilon = P$ в Ω, $P_\varepsilon = \varepsilon\triangle$ в Ω_1, $\varepsilon > 0$ большой параметр. Предполагаются обычными условия согласования на границе области Ω.

Подобные схемы МФО для конкретных краевых задач изучались при различных условиях гладкости границы области Ω и коэффициентов оператора P. Эти условия гладкости связаны со способами доказательства оценок скорости сходимости (чаще всего именно из-за возможности согласования решений на границе области Ω).

В этой работе построена обобщенная схема МФО в банаховом пространстве. При таком подходе многие ограничения предыдущих рассмотрений удалось ослабить.

Эта книга подготовлена автором в Московском физико-техническом институте (государственном университете), доцентом кафедры высшей математики которого он является.

1.2 Обозначения

Ниже мы будем придерживаться следующих обозначений, не оговаривая это особо:

E – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство;

E_n — последовательность конечномерных подпространств в E такая, что: $\dim E_n = n, \quad E_n \subset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n = L, \quad \overline{L} = E$;

$u_n \to u$ – сильная сходимость $\{u_n\}$ к элементу $u \in E$;

$u_n \rightharpoonup u$ – слабая сходимость $\{u_n\}$ к элементу $u \in E$;

D – открытое ограниченное выпуклое подмножество из E;

Непрерывная строго монотонно возрастающая функция $\varphi(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$;

Неубывающая функция $M(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$;

Функция $m(u,v) : E \times E \to \mathbb{R}_+$ такая, что: $m(u,v) > 0$ при $u \neq v$, $\overline{\lim}\ m(u,v) \setminus \|u-v\| = +\infty$ при $\|v\| \to +\infty$, и фиксированным $u \in E$, при этом выполняется условие, если $u_n \rightharpoonup u$ и $m(u,v) \to 0$, то $u_n \to u$.

Всюду $\lim\limits_{n\to\infty}$ будем обозначать так $\lim$.

ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$.

$L^p(\omega)$ – вещественное пространство Лебега с нормой

$$\|u\|_{0,p,\omega} = \left(\int_\omega |u|^p dx\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

$W^{k,p}(\omega)$ – вещественное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{k,p,\omega} = \left(\int_\omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left(|D^\alpha u|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

$W_0^{1,p}(\omega)$ – вещественное пространство Соболева с нулевым следом на границе и нормой

$$|u|_{1,p,\omega} = \left(\int_\omega \sum_{|\alpha| = 1} \left(|D^\alpha u|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Следующие обозначения являются стандартными:

$$H^k(\omega) = W^{k,2}(\omega); \quad H_0^1(\omega) = W_0^{1,2}(\omega).$$

1.3 Банаховы пространства

В этом разделе для удобства ссылок мы приведем общеизвестные результаты теории банаховых пространств.

Теорема 1.1. *(Теорема Банаха-Штейнгауза.) Пусть E – банахово пространство, X – нормированное пространство, $\{A_n\}$ – последовательность линейных ограниченных операторов из E в X.*

Тогда, если для каждого u из E последовательность $\{\|A_n u\|\}$ ограничена, то ограничена и последовательность $\{\|A_n\|\}$.

Теорема 1.2. *Пусть E нормированное пространство, последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к элементу $u \in E$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|u_n\|\}$ ограничена и $\lim(f, u_n) = (f, u)$ для произвольных f из некоторого плотного в E^* множества функционалов.*

Лемма 1.1. *Если $u_n \rightharpoonup u$ в банаховом пространстве, то $\|u\| \leqslant \underline{\lim} \|u_n\|$.*

Теорема 1.3. *Рефлексивные банаховы пространства слабо полны.*

Теорема 1.4. *В рефлексивном банаховом пространстве каждый замкнутый шар слабо компактен. Следовательно, каждая ограниченная последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Лемма 1.2. *Если все слабо сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности $\{u_n\}$ в рефлексивном банаховом пространстве сходятся к одному и тому же элементу u, то u является слабым пределом этой последовательности.*

Определение 1.1. *Банахово пространство E называется:*
строго выпуклым, если из условий $\|u\|,\ \|v\| \leqslant 1$ и $u \neq v$ следует $\|u+v\| < 2$;
равномерно выпуклым, если для любого положительного ε найдется такое положительное δ такое, что из условий $\|u\|, \|v\| \leqslant 1$ и $\|u-v\| \geqslant \varepsilon$ следует $\|u+v\| < 2(1-\delta)$.

Теорема 1.5. *Пусть E равномерно выпуклое пространство. Тогда*

1) *E рефлексивно;*
2) *из условий $u_n \rightharpoonup u,\ \ \|u_n\| \to \|u\|$ следует $u_n \to u$.*

Замечание 1.1. *Содержание этого раздела взято из §5 гл. 1 [8].*

1.4 Операторы двойственности

Приведем некоторые сведения из работ [8, 14, 15, 33].

Определение 1.2. *$J : E \to E^*$ является отображением двойственности относительно функции φ, если $\forall u \in E$*

$$(Ju, u) = \|Ju\| \cdot \|u\|\,, \|Ju\| = \varphi\left(\|u\|\right).$$

Замечание 1.2. *Из определения следует, что оператор двойственности ограничен.*

Определение 1.3. *$A : E \to E^*$ называется:* монотонным*, если $\forall u, v \in E$ выполняется условие*

$$(Au - Av, u - v) \geqslant 0;$$

строго монотонным*, если при всех $u \neq v$ из E выполняется условие*

$$(Au - Av, u - v) > 0;$$

деминепрерывным*, если из $u_n \to u$ следует $Au_n \rightharpoonup Au$.*

Теорема 1.6. *Если E пространство со строго выпуклым сопряженным, то отображение двойственности J относительно функции φ однозначно определено, монотонно и деминепрерывно. Это отображение будет строго монотонным, если пространство E строго выпукло.*

Замечание 1.3. *Теорема* 1.6 *естественным образом приводит к пространствам, которые рефлексивны и строго выпуклы вместе со своим сопряженным. Второе предположение при этом не является существенным ограничением.*

Теорема 1.7 ([33]). *Для любого $a > 1$ в E найдется такая норма $\|\cdot\|_a$, что E и E^* снабженные нормами $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_{a,*}$ строго выпуклы и для любых $u \in E$ и $f \in E^*$ справедливы неравенства*

$$a^{-1}\|u\|_a \leqslant \|u\| \leqslant a\|u\|_a,$$
$$a^{-1}\|f\|_{a,*} \leqslant \|f\|_* \leqslant a\|f\|_{a,*}.$$

Замечание 1.4. *Содержание этого раздела взято из §2.2 гл. 2 [15].*

1.5 Пространства Соболева

В этом разделе мы будем считать, что $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая ограниченная область.

Через $W^{k,p}(\omega)$ $(1 \leqslant p < \infty,\ k \geqslant 0)$ обозначается множество всех распределений $u \in D'(\omega)$ (см. [4, 5]), являющиеся вместе со своими производными $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ функциями из $L^p(\omega)$. Эти множества называются пространствами Соболева.

Лемма 1.3. *При $1 < p < \infty$ соболевское пространство $W^{k,p}(\omega)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{k,p,\omega}$ (см. обозначения) является равномерно выпуклым, сепарабельным, рефлексивным, банаховым пространством. В частности в случае $p = 2$ соболевское пространство $W^{k,2}(\omega)$, которое будет обозначаться символом $H^k(\omega)$, является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$(u,v)_{H^k(\omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\omega D^\alpha u\ D^\alpha v\ dx.$$

Через $W_0^{k,p}(\omega)$ обозначается замыкание $D(\omega)$ в $W^{k,p}(\omega)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{k,p,\omega}$. Соответственно, $H_0^k(\omega)$ равно $W_0^{k,2}(\omega)$.

Для каждой функции $u \in W_0^{k,p}(\omega)$ и мультииндекса β с $0 \leqslant |\beta| \leqslant k$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\int\limits_\omega \left|D^\beta u\right|^p\ dx \leqslant C \int\limits_\omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p\ dx \tag{1.6}$$

Из формулы (1.6) следует, что $|u|_{k,p,\omega}$ (см. обозначения) является нормой в $W_0^{k,p}(\omega)$, эквивалентной норме $\|u\|_{k,p,\omega}$. При $p = 2$ норма $|u|_{k,2,\omega}$ в $H_0^k(\omega)$ определяется скалярным произведением:

$$(u,v)_{H_0^k(\omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \int\limits_\omega D^\alpha u\ D^\alpha v\ d\,x.$$

она эквивалентна норме задаваемой скалярным произведением $(u,v)_{H^k(\omega)}$.

Замечание 1.5. *Пусть*

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (a_i; a_i + l_i), a_i \in \mathbb{R}, l_i > 0, i = 1,\ldots,n\}$, *и* $\omega \subset \Omega$.

Тогда для $u \in W_0^{1,p}(\omega)$ в неравенстве (1.6) *можно взять константу (см., например,* [17])

$$C = L = 1/\left(\pi\sqrt{l_1^{-2} + \cdots + l_n^{-2}}\right) \tag{1.7}$$

или более грубую константу

$$C = l = \min\{l_i, i = 1,\ldots,n\} \tag{1.8}$$

Определение 1.4. *Будем говорить, что ограниченная область ω имеет регулярную границу (принадлежит классу $C^{0,1}$), если существуют константы $R > 0$ и $L > 0$ такие, что для каждой точки $x_0 \in \partial\omega$ можно указать такую ее окрестность $U(x_0)$, получающуюся при помощи движения из множества*

$$U_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} < R, |y_n| < 2LR\},$$

что выполняются условия:

а) *точка $y = 0 \in U_0$ переходит в x_0;*

б) *пересечению $U(x_0) \cap \partial\omega$ соответствует поверхность*

$$y_n = f(y_1, \ldots, y_{n-1}), \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} < R,$$

где функция f липшиц-непрерывна с константой L;

в) *пересечению $U(x_0) \cap \omega$ соответствует множество:*

$$\{y \in U_0 : \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} < R, f(y_1, \ldots, y_{n-1}) < y_n < 2LR\},$$

Замечание 1.6. *Всякая ограниченная выпуклая область имеет регулярную границу.*

Замечание 1.7. *В случае ограниченной области ω с регулярной границей для каждой вектор-функции $\{u_1, \ldots, u_n\}$ с $u_i \in C^1(\overline{\omega})$ справедлива формула Стокса*

$$\int\limits_{\omega} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\partial\omega} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} u_i \vartheta_i \, d\sigma_{n-1}, \tag{1.9}$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\omega$, σ_{n-1} – $(n-1)$ мерная лебегова поверхностная мера.

Лемма 1.4 ([22, 36]). *Пусть ω – ограниченная область с регулярной границей и Ω – открытое множество такое, что $\overline{\omega} \subset \Omega$. Тогда существует линейный ограниченный оператор F (оператор продолжения), удовлетворяющий условиям:*

а) $F : W^{k,p}(\omega) \to W_0^{k,p}(\Omega)$, $(Fu)(x) = u(x)\ \forall x \in \omega$;

б) $\|Fu\|_{0,p,\Omega} \leqslant C_1(\omega, \Omega)\|u\|_{0,p,\omega}$, $\|Fu\|_{k,p,\Omega} \leqslant C_2(\omega, \Omega)\|u\|_{k,p,\omega}$,
где $p > 1$, $k \geqslant 1$.

Отметим несколько полезных для дальнейшего изложения неравенств:

Лемма 1.5. *Пусть ω – ограниченная область с регулярной границей $\partial\omega$, δ – подмножество положительной меры в ω и $\partial_1\omega$ – подмножество положительной $n-1$ – мерной поверхностной меры в $\partial\omega$. Тогда для $u \in W^{1,p}(\omega)$, $p \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\omega} |u|^p dx \leqslant C_1 \left\{ \int\limits_{\omega} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} u_{x_i}^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int\limits_{\delta} u\ dx \right|^p \right\}, \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{\omega} |u|^p dx \leqslant C_2 \left\{ \int\limits_{\omega} \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} u_{x_i}^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int\limits_{\partial_1\omega} u \; d\sigma_{n-1} \right|^p \right\} \tag{1.11}$$

с постоянными $C_1 = C_1(n, p, \delta, \omega)$, $C_2 = C_2(n, p, \partial_1\omega, \omega)$.

Лемма 1.6. *Пусть*
1) ω – *ограниченная область с регулярной границей;*
2) μ – *мера в* $\overline{\omega}$ *такая, что при некотором* $s \in [0; 1]$

$$K_1 = \sup\{r^{-s}\mu(B_r(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ r \in (0; 1)\} < \infty;$$

3) $p \geqslant 1$, k *и* l – *целые числа,* $0 \leqslant k \leqslant l-1$, $s > n - p(l-k)$. *Тогда для всех* $u \in C^l(\overline{\omega})$ *имеет место оценка:*

$$\| \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha u\|_{L_q(\overline{\omega},\mu)} \leqslant C\|u\|^{\tau}_{l,p,\omega}\|u\|^{1-\tau}_{0,p,\omega}, \tag{1.12}$$

где $B_r(x)$ – *шар радиуса* r *с центром в точке* x, $n/p - l + k < s/q$, $q \geqslant p$, $\tau = (k - s/q + n/p)/l$.

Замечание 1.8. *Для ограниченной области класса* $C^{1,1}$, $K_1 < \infty$ *при* $s = n-1$. *Если при этом* $p = q$, *то* $\tau = (kp+1)/p\,l$.

Определение 1.5. *Для* $k \geqslant 0$, $1 < p < \infty$ *мы обозначим через* $W^{-k,q}(\omega)$ *сопряженное к пространству* $W_0^{k,p}(\omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Для* $p = q = 2$ *полагаем* $H^{-k}(\omega) = (H_0^k(\omega))^*$.

Лемма 1.7. *Каждый элемент* $u \in W^{-k,q}(\omega)$ *можно представить в виде*

$$u = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha v_\alpha, \quad v_\alpha \in L_q(\omega).$$

Обратно, если каждый элемент допускает такое представление, то $u \in W^{-k,q}(\omega)$.

Замечание 1.9. *Производные в лемме* (1.7) *следует понимать в смысле* $D'(\omega)$. *Элементы* v_α *при* $k > 0$ *определяются по* u *неоднозначно.*

Ниже будет полезно следующее описание пространства $W_0^{1,p}(\omega)$.

Лемма 1.8. *Пусть* ω – *область с регулярной границей* $u \in W_0^{1,p}(\omega)$.
Тогда $u \in W^{1,p}(\omega)$ *точно тогда, когда* $u|_{\partial\omega} = 0$.

Замечание 1.10. *В основном содержание этого раздела следует* §2, *гл.* 2 [8], *лемма* 1.6 *взята из* [15], *с.* 65, *следствие* 2.

Глава 2

Некоторые предварительные результаты

2.1 Монотонные операторы с заданными условиями роста

М.М. Вайнберг в монографии [2] в предположении существования монотонного оператора двойственности с заданными условиями роста на бесконечности доказал несколько теорем о существовании решений операторных уравнений. Построим такой оператор.

Лемма 2.1 ([26]). *Пусть E – рефлексивное банахово пространство. Для функции φ (см. обозначения) и произвольного $a > 1$ найдется такой строго монотоный деминепрерывный оператор $F : E \to E^*$, что $\forall u, v \in E$ справедливы оценки:*

$$a^{-1}\varphi\left(a^{-1}\|u\|\right) \leqslant \|Fu\| \leqslant a\varphi\left(a\|u\|\right), \tag{2.1}$$

$$a^{-1}\|u\|\varphi\left(a^{-1}\|u\|\right) \leqslant (Fu, u) \leqslant a\|u\|\varphi\left(a\|u\|\right). \tag{2.2}$$

Доказательство. Зафиксируем число $a > 1$ и возьмем норму $\|\cdot\|_a$ из теоремы 1.7. По теореме 1.6 в E_a существует строго монотонный деминепрерывный оператор двойственности J относительно функции φ. Пусть $I : E \to E_a$ оператор вложения. Так как нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_a$ эквивалентны, то I и I^{-1} непрерывны. В качестве оператора F возьмем оператор $F = I^*JI$. Этот оператор строго монотонен, т.к.

$$(Fu - Fv, u - v) = (JIu - JIv, Iu - Iv)_a > 0, \quad \forall u \neq v;$$

и деминепрерывен, т.к. из $u_n \to u$ следует $JIu_n \rightharpoonup JIu$, т.е.

$$(Fu_n, v) = (JIu_n, Iv)_a \to (JIu, Iv)_a = (Fu, v), \quad \forall v \in E.$$

Заключения леммы теперь следуют из теоремы 1.7.

Лемма 2.2 ([26]). *Пусть E пространство со строго выпуклым сопряженым и $A : E \to E^*$ ограниченный оператор. Тогда существует такой оператор двойственности J, что при всех u с $\|u\| \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|Ju\| \geqslant (\|Au\| + 1)\|u\|.$$

Доказательство. Следуя теоремам 1.6 — 1.7 построим функцию φ (см. обозначения), такую, что

$$\varphi : E \to \mathbb{R}_+, \quad \varphi\left(\|u\|\right) \geqslant \left(\|Au\| + 1\right)\|u\|, \; \forall u \in E \text{ с } \|u\| \geqslant \; 1.$$

Введем вспомогательную неубывающую функцию

$$\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \mu\left(t\right) = \sup\left\{\|Au\|, \|u\| \leqslant t\right\}.$$

Очевидно, что

$$\mu\left(\|u\|\right) \geqslant \|Au\|.$$

Рассмотрим последовательность чисел $d_n = \left(\mu\left(n\right) + 1\right)\left(n - 1\right)$. Покажем, что $d_{n+1} \geqslant d_n + 1 + \mu\left(n\right)$, т.е. последовательность $\{d_n\}$ строго монотонно возрастает и $d_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n = \left(\mu\left(n+1\right) + 1\right)n - \left(\mu\left(n\right) + 1\right)\left(n - 1\right) = \\ = \left(\mu\left(n+1\right) - \mu\left(n\right)\right)n + \mu\left(n\right) + 1. \end{aligned}$$

Т.е. $d_{n+1} - d_n \geqslant \mu\left(n\right) + 1$. Через точки $\left(n - 1, d_n\right)$ проведем ломаную линию. Обозначим ее $\varphi\left(t\right)$. Это искомая функция, т.к. по построению

$$\varphi(0) \;=\; d_1 \;= 0, \; \varphi(n) = d_{n+1}, \; \lim_{t\to+\infty} = \varphi(t) \to +\infty.$$

И для $t_1 < t_2$ имеем $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Кроме этого для $t \in [n, n+1)$ получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = d_{n+1} + (t - nt)(d_{n+2} - d_{n+1}) \geqslant \\ \geqslant (\mu(n+1) + 1)n + (t - n)(\mu(n+1) + 1) \geqslant t\mu(n+1) + 1) + n. \end{aligned}$$

Т.е. для $\|u\| = t \in [n, n+1)$ справедливо

$$\varphi(\|u\| \geqslant \|u\|(\mu(n+1) + 1) \geqslant \|u\|(\mu(\|Au\|) + 1).$$

Лемма доказана.

2.2 (П) – свойство банаховых пространств

Пусть E–рефлексивное банахово пространство, $p(\cdot)$ – непрерывная полунорма в E, $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$ – замкнутое подпространство в E.

Рассмотрим фактор-пространство E/N с фактор-нормой

$$|||\pi u||| = \inf\{\|u + v\|, v \in N\},$$

здесь $\pi : E \to E/N$ – оператор канонического вложения, т.е. $\pi^{-1}u = u + N$. Известно, что в этом случае пространство E/N является рефлексивным банаховым пространством (см., например, [19]), причем функция

$$|||\pi u|||' = p(u) \tag{2.3}$$

является нормой в E/N, подчиненной фактор норме. Действительно, т.к. $p(\cdot)$ – непрерывная полунорма, то найдется такое число $C_0 > 0$, что $p(u) \le C_0\|u\|$ для всех $u \in E$, поэтому для всяких $u \in E$ и $v \in N$ получим

$$p(u) = p(u+v) \leqslant C_0\|u+v\|$$

т.е.

$$p(u) \leqslant C_0|||\pi u|||.$$

Определение 2.1 ([26]). *Будем говорить, что пара (E, p) подчинена условию* (П)*, если фактор-норма пространства E/N эквивалентна норме* (2.3)*, т.е. $C_1\, p(u) \leqslant |||u||| \leqslant C_2\, p(u)$*

Замечание 2.1. *Условие* (П) *означает, что для всякого u из E найдется такой элемент v из N, что*

$$\|u+v\| \leqslant Cp(u) \tag{2.4}$$

при некоторой положительной постоянной C, независящей от u и v.

Замечание 2.2. *Если полунорма $p(\cdot)$ в E зафиксирована, то мы будем говорить, что пространство E обладает свойством* (П)*. Символ* (П) *выбран здесь потому. что в конкретных примерах это свойство связано с возможностью продолжения функций с некоторой оценкой.*

2.3 (П)-свойство соболевских пространств

В этом разделе мы будем предполагать, что $\omega_i,\ i = 1,2,3$ – ограниченные области с регулярной границей, $\overline{\omega}_i \subset \omega_{i+1}, i = 1,2,$ число $l > 1$ и $\Omega = \omega_2 \setminus \overline{\omega}_1$.

Лемма 2.3 ([26]). *Пусть $p(u) = |u|_{1,l,\Omega}$, $N = \{u \in W_0^{1,l}(\omega_2) : u|_\Omega = 0\}$.*
Тогда пространство $E = W_0^{1,l}(\omega_2)$ обладает П*-свойством.*

Доказательство. Пусть $u \in E$ и $u_\Omega = u|_\Omega$. Т.к. Ω имеет регулярную границу и $\overline{\Omega} \subset \omega_3$, то по лемме 1.4 существует такая функция $u_{\omega_3} \in W_0^{1,l}(\omega_3)$, что $u_{\omega_3}|_\Omega = u_\Omega$ и $|u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant C_1\|u_\Omega\|_{1,l,\Omega}$. По лемме 1.8 получим $u_\Omega|_{\partial\omega_2} = 0$, поэтому из (1.11) имеем $\|u_\Omega\|_{1,l,\Omega} \leqslant C_2|u|_{1,l,\Omega} = C_2 p(u)$ (в качестве $\partial_1\Omega$ возьмем лемме 1.11 $\partial\omega_2$), в этом случае подпространство $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$. Таким образом

$$v = (u_{\omega_3}|_{\omega_2} - u)\ \in N,$$

$$|u+v|_{1,l,\omega_2} = |u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_2} \leqslant |u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant C_2 p(u).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4 ([26]). *Пусть $p(u) = \|u\|_{1,l,\Omega}$, $N = \{u \in W^{1,l}(\omega_2) : u|_\Omega = 0\}$.*
Тогда пространство $E = W^{1,l}(\omega_2)$ обладает П*-свойством.*

Доказательство. пусть $u \in E$ и $u_\Omega = u|_\Omega$. Т.к. Ω имеет регулярную границу и $\overline{\Omega} \subset \omega_3$, то по лемме 1.4 существует такая функция $u_{\omega_3} \in W_0^{1,l}(\omega_3)$, что $u_{\omega_3}|_\Omega = u_\Omega$ и $|u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant C\|u_\Omega\|_{1,l,\Omega} = Cp(u)$, в этом случае $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$. Таким образом $v = u_{\omega_3}|_{\omega_2} - u$ принадлежит N и

$$|u+v|_{1,l,\omega_2} = |u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_2} \leqslant |u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant Cp(u).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5 ([26]). *Пусть* $p(u) = \|u\|_{1,l,\omega_1}$, $N = \{u \in W_0^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_1} = 0\}$.
Тогда пространство $E = W_0^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* Π*-свойством.*

Доказательство. Пусть $u \in E$ и $u_{\omega_1} = u|_{\omega_1}$. Т.к. ω_1 имеет регулярную границу и $\overline{\omega}_1 \subset \omega_2$, то по лемме 1.4 существует такая функция $u_{\omega_2} \in W_0^{1,l}(\omega_2)$, что

$$u_{\omega_2}|_{\omega_1} = u_{\omega_1}, \quad |u_{\omega_2}|_{1,l,\omega_2} \leqslant C\|u_{\omega_1}\|_{1,l,\omega_1} = Cp(u),$$

в этом случае $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$. Таким образом $v = u_{\omega_2} - u$ принадлежит N и $|u+v|_{1,l,\omega_2} = |u_{\omega_2}|_{1,l,\omega_2} \leqslant C\|u_{\omega_1}\|_{1,l,\omega_1} = Cp(u)$. Лемма доказана.

Замечание 2.3. *Лемма* 2.5 *по сути является переформулировкой леммы* 1.4 *о продолжении функции.*

Лемма 2.6 ([26]). *Пусть*
$p(u) = \|u\|_{1,l,\omega_1}$, $N = \{u \in W^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_1} = 0\}$.
Тогда пространство $E = W^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* Π*-свойством.*

Доказательство. Пусть $u \in E$ и $u_{\omega_1} = u|_{\omega_1}$. Т.к. ω_1 имеет регулярную границу и $\overline{\omega}_1 \subset \omega_3$, то по лемме 1.4 существует такая функция $u_{\omega_3} \in W_0^{1,l}(\omega_3)$, что

$$u_{\omega_3}|_{\omega_1} = u_{\omega_1}, \quad |u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant C_1\|u_{\omega_1}\|_{1,l,\omega_1} = C_1p(u),$$

в этом случае $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$.

Обозначим $u_{\omega_2} = u_{\omega_3}|_{\omega_2}$. Тогда $\|u_{\omega_2}\|_{1,l,\omega_2} \leqslant \|u_{\omega_3}\|_{1,l,\omega_3} \leqslant C_2|u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3}$ Таким образом $v = u_{\omega_2} - u$ принадлежит N и

$$\|u+v\|_{1,l,\omega_2} = \|u_{\omega_2}\|_{1,l,\omega_2} \leqslant C_2|u_{\omega_3}|_{1,l,\omega_3} \leqslant C_3p(u).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.7 ([26]). *Пусть*
$p(u) = |u|_{1,l,\omega_1}$, $N = \{u \in W_0^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_1} = C,\ C \in \mathbb{R}\}$.
Тогда пространство $E = W_0^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* Π*-свойством.*

Доказательство. Пусть $u \in E$, и $u_{\omega_1} = u|_{\omega_1} - \int_{\omega_1} u\,dx/|\omega_1|$. По построению $\int_{\omega_1} u_{\omega_1}\,dx = 0$, поэтому из 1.10 получим

$$\|u_{\omega_1}\|_{1,l,\omega_1} \leqslant C_1|u_{\omega_1}|_{1,u,\omega_1} = C_1p(u).$$

Т.к. ω_1 имеет регулярную границу и $\overline{\omega}_1 \subset \omega_2$, то по лемме 1.4 существует такая функция $u_{\omega_2} \in W_0^{1,l}(\omega_2)$, что $u_{\omega_2}|_{\omega_1} = u_{\omega_1}$ и $|u_{\omega_2}|_{1,l,\omega_2} \leqslant C_2 \|u_{\omega_1}\|_{1,l,\omega_1} \leqslant C_3 p(u)$, в этом случае $N = \{u \in E : p(u) = 0\}$. Таким образом $v = u_{\omega_2} - u$ принадлежит N и $|u + v|_{1,l,\omega_2} = |u_{\omega_2}|_{1,l,\omega_2} \leqslant C_3 p(u)$. Лемма доказана.

Аналогично доказываются следующие леммы:

Лемма 2.8 ([26]). *Пусть*

$p(u) = |u|_{1,l,\omega_1}$, $N = \{u \in W^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_1} = C,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Тогда пространство $E = W^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* П*-свойством.*

Лемма 2.9 ([26]). *Пусть*

1) ω_i, $i = 4, \dots, k$ *– ограниченные области с регулярной границей* $\overline{\omega}_i \subset \omega_2$, $\overline{\omega}_i \cap \overline{\omega}_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$*;*

2) r *– целое,* $4 \leqslant r \leqslant k$*;*

3) $p(u) = \sum\limits_{4 \leqslant i \leqslant r-1} \|u\|_{1,l,\omega_i} + \sum\limits_{r \leqslant i \leqslant k} |u|_{1,l,\omega_i}$,

$N = \{u \in W_0^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_i} = C_i,\}$

где $C_i = 0$ *при* $i = 4, \dots, r-1$ *и* $C_i \in \mathbb{R}$ *при* $i = r, \dots, k$.

Тогда пространство $E = W_0^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* П*-свойством.*

Лемма 2.10 ([26]). *Пусть*

1) ω_i, $i = 4, \dots, k$ *– ограниченные области с регулярной границей* $\overline{\omega}_i \subset \omega_2$, $\overline{\omega}_i \cap \overline{\omega}_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$*;*

2) r *– целое,* $4 \leqslant r \leqslant k$*;*

3) $p(u) = \sum\limits_{4 \leqslant i \leqslant r-1} \|u\|_{1,l,\omega_i} + \sum\limits_{r \leqslant i \leqslant k} |u|_{1,l,\omega_i}$,

$N = \{u \in W^{1,l}(\omega_2) : u|_{\omega_i} = C_i,\}$

где $C_i = 0$ *при* $i = 4, \dots, r-1$ *и* $C_i \in \mathbb{R}$ *при* $i = r, \dots, k$.

Тогда пространство $E = W^{1,l}(\omega_2)$ *обладает* П*-свойством.*

2.4 Некоторые некоэцитивные условия разрешимости вариационных неравенств

В этом разделе мы будем предполагать, что:

L - вещественное линейное пространство;

L^* - двойственное L пространство;

(f, x) - значение линейного функционала $f \in L^*$ на векторе $x \in L$.

Пусть D и K - выпуклые подмножества из L, состоящие более чем из одной точки такие, что $K \cap D \neq \emptyset$ и $K \setminus D \neq \emptyset$.

Для $x, w \in L$, введем

$x_t(w) = tx + (1-t)w$ $(t \geqslant 0)$,

$D^w = \{x \in D : x = x_t(w), t > 1\}$,

$\Gamma^w = D \setminus D^w$.

Множество D^w является аналогом внутренности множества D, а Γ^w — его границы.

Пусть A - оператор, действующий из K в L^*, j - собственно выпуклый функционал, определенный на выпуклой оболочке множества $K \cup \{w\}$, $\quad j(x) \not\equiv +\infty$ при $x \in K \cap D$.

Введем $f(x, y) = (Ax, y - x) + j(y) - j(x)$.

Приведем две теоремы, являющиеся основными этого раздела.

Теорема 2.1 ([27]). *Из разрешимости вариационного неравенства (ВН):*

$$\exists x \in K \cap D: \; f(x, y) \geqslant 0 \; \forall y \in K \cap D, \tag{2.5}$$

следует, что x является решением ВН:

$$\exists x \in K: \; f(x, y) \geqslant 0 \; \forall y \in K, \tag{2.6}$$

если для некоторой точки $w \in L$ выполняются следующие условия

$$D^w \cap K \neq \emptyset, \tag{2.7}$$

$$\forall x \in \Gamma^w \cap K \; \exists t \in (0; 1) : x_t(w) \in K \cap D, \tag{2.8}$$

$$\forall x \in K \setminus D \; \exists t \in (0; 1) : x_t(w) \in D, \tag{2.9}$$

$$\forall x \in \Gamma^w \cap K: \; f(x, y) < 0. \tag{2.10}$$

Теорема 2.2 ([27]). *Если в условиях теоремы* 2.1 *заменить условия* (2.9, 2.10) *на условия*

$$\forall x \in K \setminus D \; \exists t \in (0; 1) : x_t(w) \in K \cap D, \tag{2.11}$$

$$\forall x \in \Gamma^w \cap K: \; f(x, y) \leqslant 0, \tag{2.12}$$

то справедливо заключение теоремы 2.1 .

Лемма 2.11 ([27]). *Условие*

$$\forall y \in K \cap D^w \; \forall x \in K \; \exists t \in (0; 1) : x_t(y) \in K \cap D, \tag{2.13}$$

является следствием условия (2.9).

Замечание 2.4. *При доказательстве основных результатов мы не будем нигде использовать каких бы то ни было свойств пространства L и оператора A.*

Замечание 2.5. *В теоремах* 2.1, 2.2 *не предполагаем, что точка w принадлежит множеству D или K*

Замечание 2.6. *Условия* (2.7, 2.8, 2.11) *означают, что множество* $K \cap D$ *и точка* w *порождают* K*, т.е.* $\forall x \in K$ *существует вектор* $x_0 \in K \cap D$ *принадлежащий интервалу* $(x; w)$.

Отметим, что если $w \in D$ *, то по определению* $w \in D^w$*, т.к.* $w = w_t(w)$ *для любых* t.

Замечание 2.7. . *Если* $w \in K$ *, то условия* (2.7, 2.8, 2.11) *являются следствиями условия* (2.9).

Действительно, если $w \in K$ *, то по условию* (2.9) $\exists t \in (0;1)$ *такое что* $w = w_t(w) \in D$*, т.е.* $w \in K \cap D^w$*, что доказывает условие* (2.7).

Если $x \in K \backslash D$*, то отрезок* $[x; w] \subset K$*, а часть его по условию* (2.9) *лежит в* D*, т.е. при некотором числе* $t \in (0;1)$ *вектор* $x_t(w) \in D$.

Последнее утверждение доказывает (2.11).

Условие (2.8) *вытекает из включений* $x \in K \cap \Gamma^w \subset K \cap D$ *и* $w \in K \cap D$*, и выпуклости множества* $K \cap D$.

Докажем теперь анонсированные выше результаты.

Доказательство леммы 2.11.

Пусть $y \in K \cap D^w$ и для выпуклых множеств D и K выполняется условие (2.9), тогда $\exists t \in (0;1)$ такое, что $\forall x \in K$ справедливо включение (2.13) $x_t(y) \in K \cap D$. Без ограничения общности положим $w = 0$ и доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

1. Если $y = x$, то $x_t(y) = y \in K \cap D$ при всех t, а при $x \neq y$ и $x \in K \cap D$, из выпуклости множества $K \cap D$ отрезок $[x; y] \subset K \cap D$, что доказывает (2.13).

2. Если $w = 0 \in K$, то $0 \in K \cap D^w$.

3. Пусть $x \in K \backslash D$ и $y = w = 0$, то из первого этапа имеем $x \neq y$. Но при этом отрезок $[0; x] \subset K$, а из (2.9) следует, что $\exists t \in (0;1)$ такое, что $tx \in D$, что доказывает (2.13).

4. Пусть три точки $x \in K \backslash D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = 0$ лежат на одной прямой и w лежит на интервале $(x; y) \subset K$, тогда доказательство леммы вытекает из второго этапа доказательства леммы и включения $w = 0 \in K$. Действительно в этом случае $w = x_t(y)$ при некотором $t \in (0;1)$.

5. Пусть три точки $x \in K \backslash D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = 0$ лежат на одной прямой и w не лежит на отрезке $[x; y] \subset K$, тогда $y = mx$ при некотором $m > 0$. Из (2.9) получим: $\exists t \in (0;1)$ такое, что $tx = x_t(w) \in D$. Покажем от противного, что число $m \in (0;1)$. Пусть $m \geqslant 1$, тогда отрезок $[tx; mx] \subset D$ содержит $x \in D$, что противоречит условию $x \in K \backslash D$. Т.к. $y \in D^w$, то $\exists r > 1$ такое, что $ry \in D$. Таким образом множества $(y; ry)$ и $[y; x]$ имеют непустое пересечение, а, т.к. $y = mx$, то $m \in (0;1)$.

6. Рассмотрим последний случай, когда три точки $x \in K \backslash D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = 0$ не лежат на одной прямой. Из (2.9) получим $\exists m \in (0;1)$ такое, что $mx \in D$, а т.к. $y \in K \cap D^w$, то $\exists r > 1$ такое, что $ry \in D$. Из выпуклости

множеств D и K следует, что $[x;y] \subset K$, а $[mx;ry] \subset D$. Докажем, что эти отрезки пересекаются в некоторой точке интервала $(x;y)$. Рассмотрим уравнение $tx + (1-t)y = sry + (1-s)mx$. Так как точки x, y, $w=0$ не лежат на одной прямой, то $t = m(1-s)$ и $(1-t) = sr$. То есть $t = (r-1)/(r/m-1) \in (0;1)$ и $s = (1-t)/r \in (0;1)$. Таким образом на интервале $(x;y) \subset K$ найдется точка из D, что доказывает лемму и в этом случае.

Доказательство теоремы 2.1.

Пусть ВН (2.5) имеет решение x (в этом случае $j(x) \neq +\infty$, т.к. $\exists y \in K \cap D$ на такой, что $j(y) < +\infty$) и выполняются условия (2.7, 2.8, 2.9, 2.10). Тогда x является решением ВН (2.6). Докажем от противного, что $x \in K \cap D^w$. Пусть $x \in K \cap \Gamma^w$, тогда из (2.8) получим, что $\exists t \in (0;1)$ такое, что $x_t(w) \in K \cap D$. Подставим $y = x_t(w)$ в (2.5). Получим

$$0 \leqslant f(x,y) = (Ax, tx + (1-t)w - x) + j(tx + (1-t)w) - j(x) \leqslant (1-t)f(x,w),$$

так как

$$j(tx + (1-t)w) - j(x) \leqslant tj(x) + (1-t)j(w) - j(x) = (1-t)(j(w) - j(x)),$$

т.е.

$$f(x,w) \geqslant 0, \tag{2.14}$$

но (2.14) противоречит (2.10), что доказывает включение $x \in K \cap D^w$. Из последнего включения и леммы 2.11 имеем $\forall z \in K$ $\exists t \in (0;1)$ такое, что $z_t(x) \in K \cap D$. Как при доказательстве (2.14) подставим в (2.5) $y = z_t(x)$, и получим $f(x,z) \geqslant 0$, что совпадает с ВН (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.

Пусть ВН (2.5) имеет решение x и выполняются условия (2.7, 2.8, 2.11, 2.12), тогда x является решением ВН(2.6). Т.к. справедливо (2.8), а (2.11) является следствием (2.9), то по-прежнему справедливо неравенство (2.14), а с учетом (2.12) получим $f(x,w) = 0$. Из (2.5) теперь для произвольных $y \in K \cap D$ получим

$$0 \leqslant f(x,y) = f(x,y) - f(x,w) = (Ax, y - w) + j(y) - j(w).$$

Из (2.11) имеем, что для всех $z \in K \backslash D$ при некотором $t \in (0;1)$ справедливо включение $y = z_t(w) \in K \cap D$. Подставим этот y в предыдущее неравенство и как выше получим, что оно справедливо для $\forall z \in K \backslash D$. С учетом равенства $f(x,w) = 0$ и ВН(2.5), рассматриваемое неравенство выполняется для $\forall z \in K$ и совпадает с ВН (2.6). Теорема 2.2 доказана.

Глава 3

Операторы монотонного типа

3.1 Определения различных классов операторов монотонного типа

Операторы монотонного типа (типа (M)) введены в известной работе Лионса [14]. Здесь изучим некоторое обобщение этого понятия.

Определение 3.1. *Оператор* $A : \overline{D} \to E^*$ *называется:*

монотонным, *если* $\forall u, v \in \overline{D}$ *выполняется* $(Au - Av, u - v) \geqslant 0$;

строго монотонным , *если* $\forall u, v \in \overline{D}$ *таких, что* $u \neq v$, *справедливо неравенство* $(Au - Av, u - v) > 0$;

сильно монотонным *с константой* $m > 0$, *если* $\forall u, v \in E$ *выполняется* $(Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^2$;

радиально непрерывным, *если* $\forall\, u, v \in E$ *таких, что* $u, u + v \in \overline{D}$, *функция* $\psi(t) = (A(u + tv), v)$ *непрерывна по* t *на отрезке* $[0; 1]$*;*

непрерывным на конечномерных подпространствах, *если для каждого конечномерного подпространства* $M \subset E$ *отображение* $A : M \cap \overline{D} \to E^*$ *слабо непрерывно;*

деминепрерывным, *если из условий* $\{u_n\} \in \overline{D}$, $u_n \to u$ *следует* $Au_n \rightharpoonup Au$*;*

усиленно непрерывным, *если из условий* $\{u_n\} \in \overline{D}$, $u_n \rightharpoonup u$ *следует* $Au_n \to Au$*;*

Следующее ниже определение является ослаблением понятия "сильная монотонность" из работы [2].

Определение 3.2 ([26]). $A : E \to E^*$ *называется сильно монотонным, если* $\forall\, u, v \in E$ *справедливо неравенство* $(Au - Av, u - v) \geqslant m(u, v)$. *(Свойства функции* $m(u, v)$ *см. в обозначениях.)*

Определение 3.3 ([2]). $A : \overline{D} \to E^*$ *называется полумонотонным, если он представим в виде суммы монотонного и усиленно непрерывного операторов.*

Определение 3.4 ([11]). *$A : \overline{D} \to E^*$ имеет полуограниченную вариацию, если $\forall u, v \in \overline{D}$ таких, что $\|u\|, \|v\| \leqslant R$ справедливо неравенство*

$$(Au - Av, u - v) \geqslant -\phi(R, \|u - v\|'),$$

где $\|u\|'$ – норма в E компактная по сравнению с нормой $\|u\|$ в E и непрерывная функция $\phi(R, r) \geqslant 0$ удовлетворяет условию $\phi(R, tr)/t \to 0$ при $t \to +0$ для всех $R, r \geqslant 0$.

Определение 3.5 ([35]). *$A : \overline{D} \to E^*$ называется:*

псевдомонотонным, если он локально ограничен и из условий

$$u_n \in \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n - u) \leqslant 0$$

следуют соотношения $Au_n \rightharpoonup Au$, $\lim\,(Au_n, u_n - u) = 0$;

удовлетворяющим условию $(S)_+$, если из условий

$$u_n \in \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n - u) \leqslant 0$$

следует, что $u_n \to u$.

Замечание 3.1. *В* [14] *условие псевдомонотонности дано для ограниченных операторов в несколько иной (эквивалентной) формулировке. Можно показать* (см. [14])*, что псевдомонотонные операторы деминепрерывны.*

Определение 3.6 ([31]). *$A : \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию (A), если $A = T + B$, где B – ограниченный оператор, а оператор T удовлетворяет условию*

$$(Tu - Tv, u - v) \geqslant -\phi(R, \|u - v\|'),$$
$$\forall u, v \in \overline{D},\ \|u\|, \|v\| \leqslant R,\ \|u\|' \leqslant a\|u\|\ (a > 0),$$

функция $\phi(R, t)$ непрерывна по t при фиксированном R.

Определение 3.7 ([14]). *Оператор $A :\ E \to E^*$ удовлетворяет условию (M), если из условий $u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup f,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$ следует $Au = f$.*

Определение 3.8 ([26]). *Оператор $A : \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию:*

(A_1), если $\forall u, v \in \overline{D},\ \|u\|, \|v\| \leqslant R$ справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geqslant -\psi(R),$$

где $\psi \geqslant 0$ неубывающая функция неотрицательного аргумента;

(O), если $0 \in D$ и для всякой ограниченной последовательности $\{u_n\}$ из $\overline{D}$ из ограниченности сверху последовательности $\{(Au_n, u_n)\}$ следует ограниченность последовательности $\{Au_n\}$;

(O_1), для всякой ограниченной последовательности $\{u_n\}$ из $\overline{D}$ из ограниченности сверху последовательности $\{(Au_n, u_n - u)\}$ при некотором u из D, зависящем, вообще говоря, от последовательности $\{u_n\}$ следует ограниченность последовательности $\{Au_n\}$;

(M_0), если из условий

$$\{u_n\} \subset \overline{D}, \quad u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup 0, \quad \lim{(Au_n, u_n)} = 0$$

следует неравенство $(Au, u - v) \leqslant 0,\ \forall v \in \overline{D}$;

(M_1), если из условий

$$\{u_n\} \subset \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup f,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$$

следует неравенство $(Au - f, u - v) \leqslant 0,\ \forall v \in \overline{D}$;

(M_2), если из условий

$$\{u_n\} \subset \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup f,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$$

следует неравенство

$$(Au - f, u - v) \leqslant 0,\ \forall v \in \overline{D};$$

и равенство

$$\lim{(Au_n, u_n)} = (f, u)\,.$$

Замечание 3.2. *В [31] показано, что оператор $A:\ U \to E^*$, удовлетворяющий условию (A), локально ограничен в каждой внутренней точке множества U и удовлетворяет условию (O). Ниже мы распространим этот результат на операторы, удовлетворяющие условию (A_1). Отметим здесь также следующие очевидные факты:*

1) *если оператор $A:\ \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию (S_+) и деминепрерывен, то он псевдомонотонен;*

2) *условие (M_2) слабее условия псевдомонотонности.*

Замечание 3.3. *Свойства $(M_i), (i = 0, 1, 2)$ введены по аналогии со свойством (M). Причем, если $D = E$, то свойство (M_1) совпадает со свойством (M).*

3.2 Изучение свойств операторов типа (O)

Лемма 3.1 ([26]). *Пусть $A:\ \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию (A_1). Тогда он локально ограничен в каждой точке $u \in D$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдется $u \in D$, в котором A не является локально ограниченным. Тогда найдется последовательность удовлетворяющая условиям $u_n \in D$, $u_n \to u$, $\|Au_n\| \to \infty$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим

$d_n = 1 + \|Au_n\| \|u - u_n\|$. В силу условия (A_1) для любого v из некоторой окрестности нуля такого, что $u + v \in D$, $\|u_n\|, \|u\|, \|v\| \leqslant R/2$ получим

$$(Au_n - A(u+v), u_n - u - v) \geqslant -\psi(R),$$

т.е.

$$(Au_n, v) \leqslant \psi(R) + (Au_n, u_n - u) + (A(u+v), u + v - u_n) \leqslant$$
$$\leqslant \psi(R) + \|Au_n\| \|u_n - u\| + \|A(u+v)\| \|u + v - u_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \big(\psi(R) + 1 + 3R\|A(u+v)\|\big) d_n,$$

т.о. $(Au_n, v)/d_n \leqslant \psi(R) + 1 + 3R\|A(u+v)\| \leqslant C_1$, где постоянная C_1 зависит от u, v и R, но не зависит от n. Соответствующая оценка верна и для $-v$, т.е. $\overline{\lim} |(Au_n, v)|/d_n < \infty$ $\forall v \in E$. По тереме Банаха-Штейнгауза получим $\|Au_n\|/d_n \leqslant C$, где постоянная C не зависит от n, т.е.

$$\|Au_n\| \leqslant C \left(1 + \|Au_n\| \|u - u_n\|\right).$$

Т.к. $u_n \to u$, то найдется такое число m, что $\forall n > m$ справедливо неравенство $C\|u - u_n\| < 1/2$. Из последнего неравенства при $\forall n > m$ получим $\|Au_n\| \leqslant 2C$, что противоречит предположению $\|Au_n\| \to \infty$.

Замечание 3.4. *Доказательство леммы* 3.1 *аналогично доказательству леммы* 1.2 *из* §1, *гл.* 3 [8].

Лемма 3.2 ([26])**.** *Пусть* $A : \overline{D} \to E^*$ *удовлетворят условию* (A_1)*. Тогда он является* (O_1) *оператором.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдется $u \in D$, константа $C > 0$ и ограниченная последовательность $\{u_n\} \subset D$ такие, что

$$(Au_n, u_n - u) \leqslant C, \;\; \|Au_n\| \;\to\; \infty.$$

Положим $b_n = \sqrt{\|Au_n\|}$ и выберем v также, как в лемме 3.1, тогда

$$(Au_n, v) \leqslant \psi(R) + (Au_n, u_n - u) + (A(u+v), u + v - u_n) \leqslant$$

$$\leqslant \psi(R) + C + \|A(u+v)\| \|u + v - u_n\|,$$

т.е. $(Au_n, v)/b_n \leqslant C_1/b_n$, где C_1 зависит от R, u и v, но не зависит от n. Аналогичное неравенство выполняется и для элемента $-v$, т.е. $(Au_n, v)/b_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $Au_n/b_n \rightharpoonup 0$, и, следовательно, последовательность $\{\|Au_n\|/b_n\}$ ограничена, т.о. последователность $\{b_n\} = \{\|Au_n\|/b_n\}$ ограничена, что противоречит предположению.

Замечание 3.5. *Если* $A : \overline{D} \to E^*$ *удовлетворят условию* A_1 *и* $0 \in D$, *то из леммы* 3.2 *следует, что он является* (O) *– оператором.*

Лемма 3.3 ([26]). *Пусть $A, B, C : \overline{D} \to E^*$ такие, что $A = B + C$, где B удовлетворяет условию (A_1), C — условию (O). Тогда A является (O) – оператором.*

Доказательство. Пусть
$\{u_n\} \subset \overline{D}$ – ограниченная последовательность и $\|u_n\| \leqslant R, \ \ (Au_n, u_n) \leqslant L$.
Тогда из условия (A_1) для B получим

$$(Bu_n - B0, u_n) \geqslant -\psi(R), \ \ (Bu_n, u_n) \geqslant -\psi(R) - R\|B0\|.$$

Из последнего неравенства следует

$$L \geqslant (Au_n, u_n) \geqslant (Cu_n, u_n) - \psi(R) - R\|B0\|,$$

т.е. $(Cu_n, u_n) \leqslant L + \psi(R) + R\|B0\|$. Так как C удовлетворяет условию (O), то последовательность $\{Cu_n\}$ ограничена, поэтому

$$(Bu_n, u_n) = (Au_n, u_n) - (Cu_n, u_n) \leqslant L + R\|Cu_n\|.$$

По лемме 3.2 оператор B удовлетворяет условию (O), следовательно последовательность $\{Bu_n\}$ ограничена.

Аналогично с небольшими изменениями доказывается лемма.

Лемма 3.4 ([26]). *Пусть $A, B, C : \overline{D} \to E^*$ такие, что $A = B + C$, где B удовлетворяет условию (A_1), C — условию (O_1). Тогда A удовлетворяет условию (O_1).*

3.3 Изучение свойств операторов типа (M)

Лемма 3.5 ([26]). *Пусть $A : \overline{D} \to E^*$ такой, что*

$$(Au - Av, u - v) \geqslant \psi(u, v), \ u, v \in \overline{D},$$

где функция $\psi(u, v) : \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\underline{\lim}\psi(u_n, u) \geqslant 0$ при $u_n \rightharpoonup u$. Тогда

1) *если $u_n \rightharpoonup u$, то $\underline{\lim}\,(Au_n, u_n - u) \geqslant 0$;*

2) *если A удовлетворяет условию (M_1), то он удовлетворяет и условию (M_2);*

3) *если A слабо непрерывен, то он удовлетворяет условию (M_2) и функционал (Au, u) слабо полунепрерывен снизу.*

Доказательство.

1) пусть $\{u_n\} \subset \overline{D}$, $u_n \rightharpoonup u$, тогда $(Au_n - Au, u_n - u) \geqslant \psi(u_n, u)$, $(Au_n, u_n - u) \geqslant \psi(u_n, u) + (Au, u_n - u)$, переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $\underline{\lim}\,(Au_n, u_n - u) \geqslant 0$, что доказывает заключение 1.

2) пусть

$$\{u_n\} \subset \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup f,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$$

и A удовлетворяет условию (M_1). Тогда из определения 3.8 следует

$$(Au - f, u - v) \leqslant 0, \forall v \in \overline{D}.$$

А по заключению 1 леммы 3.5 получим $\underline{\lim}\,(Au_n, u_n - u) \geqslant 0$, следовательно $\underline{\lim}\,(Au_n, u_n) \geqslant (f, u)$, что доказывает равенство $\lim\,(Au_n, u_n) = (f, u)$, условие (M_2) и заключение 2 леммы 3.5.

3) пусть $\{u_n\} \subset \overline{D}$, $u_n \rightharpoonup u$, и A слабо непрерывен, тогда $Au_n \rightharpoonup Au$, т.е. A удовлетворяет условию (M_1), и по заключению 2 леммы 3.5 он удовлетворяет условиям (M_2) и слабой полунепрерывности функционала (Au, u).

Лемма 3.6 ([26]). *Пусть $A : \overline{D} \to E^*$ радиально непрерывный оператор, имеющий полуограниченную вариацию. Тогда он (M_2) – оператор.*

Доказательство. Т.к. A имеет полуограниченную вариацию (см. определение 3.4), то он удовлетворяет условиям леммы 3.5. Покажем, что A является (M_1) – оператором. Пусть

$$\{u_n\} \subset \overline{D}, \quad u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup f, \quad \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u),$$

тогда из условия полуограниченной вариации получим:

$$(Au_n - Av, u_n - v) \geqslant -\phi(R, \|u_n - v\|'), \quad \forall v \in \overline{D},$$

где $\|u_n\|, \|v\| \leqslant R$.

Т.к. $\overline{\lim}\,(Au_n, u_n - v) \leqslant (f, u - v)$, то $(Av - f, v - u) \geqslant -\phi(R, \|u - v\|'$.

Т.к. $\overline{D}$ — выпуклое множество, то $\forall t \in [0; 1]$ элемент $v_t = u + t(v - u)$ принадлежит $\overline{D}$, поэтому

$$(Av_t - f, v - u) = (Av_t - f, v_t - u)\,/t \geqslant -\phi(R, t\|u - v\|')/t.$$

Т.к. A радиально непрерывен, то в пределе при $t \to +0$ из последнего соотношения получим $(Av - f, v - u) \geqslant 0, \ \forall v \in \overline{D}$.

Замечание 3.6. *Из леммы 3.6 следует, что всякий монотонный радиально непрерывный оператор $A : \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию (M_2).*

Лемма 3.7 ([26]). *Пусть*
1) *$A, B, C : \overline{D} \to E^*$ такие, что $A = B + C$;*
2) *C слабо непрерывен;*
3) *функционал (Cu, u) слабо полунепрерывен снизу;*
4) *B удовлетворяет условию (M_i) $i = 1, 2$.*
Тогда A удовлетворяет условию (M_i) $i = 1, 2$.

Доказательство.

1) пусть

$$\{u_n\} \subset \overline{D}, u_n \rightharpoonup u, Au_n \rightharpoonup f, \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u).$$

Тогда из слабой непрерывности C имеем $Cu_n \rightharpoonup Cu$, т.е. $Bu_n \rightharpoonup f - Cu$. Т.к. (Cu, u) слабо полунепрерывен снизу, то $\underline{\lim}\,(Cu_n, u_n) \geqslant (Cu, u)$, поэтому

$$\overline{\lim}\,(Bu_n, u_n) \leqslant \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) - \underline{\lim}\,(Cu_n, u_n) \leqslant$$
$$\leqslant (f, u) - (Cu, u) = (f - Cu, u)\,;$$

2) пусть $i = 1$, тогда из условия (M_1) для B следует, что

$$(Bu - f + Cu, u - v) \leqslant 0, \forall v \in \overline{D},$$

т.е. $(Au - f, u - v) \leqslant 0, \forall v \in \overline{D}$. Лемма 3.7 для $i = 1$ доказана.

3) пусть $i = 2$, тогда, продолжая второй этап доказательства, из условия (M_2) для B получим $\lim\,(Bu_n, u_n) = (f - Cu, u)$. Используя теперь слабую полунепрерывность снизу функционала (Cu, u), получим

$$\underline{\lim}\,(Au_n, u_n) \geqslant \underline{\lim}\,(Bu_n, u_n) + \underline{\lim}\,(Cu_n, u_n) \geqslant (f - Cu, u) + (Cu, u) = (f, u$$

Лемма 3.7 доказана полностью.

Замечание 3.7. *Из леммы 3.7 следует, что полумонотонный радиально непрерывный оператор $A : \overline{D} \to E^*$ является (M_2) оператором.*

Лемма 3.8 ([26]). *Пусть*

1) *$A, B, C : \overline{D} \to E^*$ такие, что $A = B + C$;*

2) *C слабо непрерывен и $(Cu - Cv, u - v) \geqslant \psi(u, v)$, $u, v \in \overline{D}$, где функция $\psi(u, v) : \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\underline{\lim}\psi(u_n, u) \geqslant 0$ при $u_n \rightharpoonup u$;*

3) *B удовлетворяет условию (M_i) $i = 1, 2$.*

Тогда A удовлетворяет условию (M_i) $i = 1, 2$.

Доказательство. Из заключения 3 леммы 3.5 следует, что C удовлетворяет условию (M_2) и функционал (Cu, u) слабо полунепрерывен снизу. Т.е. A, B, и C удовлетворяют условиям леммы 3.7, из которой следуют утверждения леммы 3.8.

Замечание 3.8. *В качестве C в условии леммы 3.8 можно брать слабо непрерывный монотонный (полумонотонный или имеющий полуограниченную вариацию) оператор.*

Лемма 3.9 ([26]). *Пусть*

1) *$A, B, C : \overline{D} \to E^*$ такие, что $A = B + C$;*

2) *C удовлетворяет условию (M_1) и $(Cu - Cv, u - v) \geqslant \psi(u, v)$, $u, v \in \overline{D}$, где функция $\psi(u, v) : \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\underline{\lim}\psi(u_n, u) \geqslant 0$ при $u_n \rightharpoonup u$;*

3) *B удовлетворяет условию (M_2);*

4) *один из операторов оператор B или C ограничен.*

Тогда A удовлетворяет условию (M_2).

Доказательство. Пусть

$$\{u_n\} \subset \overline{D},\ u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup f,\ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u).$$

Т.к. $Au_n \rightharpoonup f$ и один из операторов B или C ограничен, то можно считать, что $Bu_n \rightharpoonup b$ и $Cu_n \rightharpoonup c$, и $f = b + c$. Из условия 2 леммы имеем

$$(Cu_n, u_n) \geqslant \psi(u, u_n) - (Cu, u - u_n) + (Cu_n, u)\,.$$

Из последнего неравенства следует

$$(Bu_n, u_n) \leqslant (Au_n, u_n) - (Cu_n, u_n) \leqslant (Au_n, u_n) - \psi(u, u_n) - (Cu_n, u) + (Cu, u - u_n\ ,$$

т.е.

$$\overline{\lim}\,(Bu_n, u_n) \leqslant \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) - \underline{\lim}\,\psi(u_n, u) - (c, u) \leqslant (f - c, u) = (b, u).$$

Т.к. B по условию (M_2) – оператор, то $\lim\,(Bu_n, u_n) = (b, u)$ и

$$(Bu - b, u - v) \leqslant 0, \quad \forall v \in \overline{D}.$$

Теперь $\overline{\lim}\,(Cu_n, u_n) \leqslant \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) - \lim\,(Bu_n, u_n) \leqslant (f - b, u) = (c, u)$. По лемме 3.5 оператор C удовлетворяет условию (M_2), поэтому $\lim\,(Cu_n, u_n) = (Cu, u)$, $(Cu - c, u - v) \leqslant 0\ \forall v \in \overline{D}$. Таким образом

$$\lim\,(Au_n, u_n) = \lim\,(Bu_n, u_n) + \lim\,(Cu_n, u_n) = (b + c, u) = (f, u),$$

$$(Au - f, u - v) = (Bu - b, u - v) + (Cu - c, u - v) \leqslant 0, \quad \forall v \in \overline{D}.$$

Замечание 3.9. *В качестве C в условии леммы 3.9 можно брать радиально непрерывный монотонный (полумонотонный или имеющий полуограниченную вариацию) оператор.*

Лемма 3.10 ([26]). *Пусть*

1) *оператор $A : \overline{D} \to E^*$ удовлетворяет условию (M_1);*
2) *$\{u_n\} \subset \overline{D},\ \ u_n \rightharpoonup u,\ \ Au_n \rightharpoonup f,\ \ \overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$;*
3) *для некоторого $z \in D$ справедливо $(Au - f, u - z) \geqslant 0$.*

Тогда $Au = f$.

Доказательство. Из определения условия (M_1) (см. определение 3.8) получим

$$(Au - f, u - v) \leqslant 0 \ \ \forall v \in \overline{D},$$

поэтому $(Au - f, z - v) = (Au - f, u - v) + (Au - f, z - u) \leqslant 0 \ \ \forall v \in \overline{D}$. Т.к. $z \in D$, то множество

$$D_z = \{x \in E : x = z - v, v \in D\}$$

является окрестностью нуля в E, т. е. $(Au - f, x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in D_z$. Последнее неравенство эквивалентно равенству $Au = f$. Лемма 3.10 доказана.

Лемма 3.11 ([24]). *Пусть*

1) $A : E \to E^*$ (M_1) – *оператор;*

2) $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup f$, $\overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$.

Тогда $Au = f$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы достаточно отметить, что условие 2 леммы 3.10 выполняются при $z = u$.

Из леммы 3.10 вытекает также

Лемма 3.12 ([26]). *Пусть*

1) $A : \overline{D} \to E^*$ *удовлетворяет условию* (M_1)*;*

2) *для некоторого* $u \in D$ *оператор* A *локально ограничен.*

Тогда A *деминепрерывен в точке* u.

Доказательство. Нам надо доказать, что из $u_n \to u$ следует $Au_n \rightharpoonup Au$. Из сильной сходимости u_n к u вытекает, что для произвольной окрестности U точки u все члены последовательности $\{u_n\}$, начиная с некоторого, лежат в этой окрестности. Поэтому из локальной ограниченности A в u вытекает, что последовательность $\{Au_n\}$ ограничена. Без ограничения общности можно предположить, что $Au_n \rightharpoonup f$. Проверим условия леммы 3.10.

Условие 1) леммы 3.10 и леммы 3.12 совпадают, условие 3) леммы 3.10 выполняется при $z = u$. Осталось проверить условие 2) леммы 3.10. Т.е. условие $\overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$. Последнее докажем в более сильной формулировке:

$$\begin{aligned}\lim\,(Au_n, u_n) &= \lim\,((Au_n, u_n - u) + (Au_n, u)) = \\ &= \lim\,(Au_n, u_n - u) + \lim\,(Au_n, u) = (f, u).\end{aligned}$$

Отметим, что последнее равенство вытекает из того, что последовательность $\{Au_n\}$ ограничена, а $u_n \to u$.

Замечание 3.10. *Из леммы* 3.12 *следует, что всякий локально ограниченный* (M_1) – *оператор деминепрерывен во всех внутренних точках своей области определения, в частности, это замечание справедливо для для радиально непрерывных монотонных (полумонотонных или имеющих полуограниченную вариацию) операторов.*

Лемма 3.13 ([26]). *Пусть*

1) $A : \overline{D} \to E^*$ *удовлетворяет условию* (M_0)*;*

2) $0 \in D$ *;*

3) $\{u_n\} \subset \overline{D}$, $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup 0$, $\overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant 0$*;*

4) $\forall v \in \partial D$ *выполняется неравенство* $(Av, v) \geqslant 0$.

Тогда $Au = 0$.

Доказательство. 1) при $f = 0$ совпадают как условия (M_0) и (M_1), так и условие 2 леммы 3.10 с условием 3 леммы 3.13 ;

2) пусть $u \in D$, тогда условие 3 леммы 3.10 выполняется при $z = u$, поэтому $Au = 0$.

3) пусть $u \in \partial D$, тогда условие 3 леммы 3.10 выполняются при $z = 0$, т.к. в этом случае оно имеет вид $(Au, u) \geqslant 0$, и $\forall u \in \partial D$, что справедливо в силу условия 4 леммы 3.13. Т.е. $Au = 0$.

Аналогично доказывается

Лемма 3.14 ([26]). *Пусть*

1) *оператор* $A : \overline{D} \to E^*$ *удовлетворяет условию* (M_1)*;*

2) $\{u_n\} \subset \overline{D}$ $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup f$, $\overline{\lim}\,(Au_n, u_n) \leqslant (f, u)$*;*

3) $\exists z \in D$ *такой, что* $(f, z - u) \leqslant 0$ *и для* $\forall v \in \partial D$ *выполняется неравенство* $(Av, v - z) \geqslant 0$*.*

Тогда $Au = f$*.*

3.4 Разрешимость уравнений с операторами типа (M)

В этом параграфе мы будем придерживаться введенных выше обозначений. Т.е. мы будем считать, что E – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, D – отрытое ограниченное выпуклое подмножество из E, $\{E_n\}$ – последовательность подпространств в E такая, что $\dim E_n = n$, $E_n \subset E_{n+1}$ при всех $n = 1, 2, \dots,$ $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} E_n = L$, множество L плотно в E.

В [3] доказана следующая "лемма об остром угле"

Лемма 3.15. *Пусть* B *— открытое ограниченное подмножество евклидового пространства* $\mathbb{R}^n$*, содержащее нуль, и* A *непрерывное отображение* $\overline{B}$ *в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда, если на* ∂B *выполняется неравенство* $(Au, u) > 0$*, то уравнение*

$$Au = 0 \tag{3.1}$$

имеет по крайней мере одно решение $u_0 \in B$*.*

Нам понадобится следующее очевидное уточнение этой леммы, доказательство которой проводится в $\mathbb{R}^n$, и мы здесь намеренно приводим его из тех соображений, что основные идеи последнего многократно используются в дальнейшем в банаховых пространствах.

Лемма 3.16. *Пусть* B *— открытое ограниченное подмножество евклидового пространства* $\mathbb{R}^n$*, содержащее нуль, и* A *непрерывное отображение* $\overline{B}$ *в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда, если на* ∂B *выполняется неравенство*

$$(Au, u) \geqslant 0, \tag{3.2}$$

то уравнение (3.1) *имеет по крайней мере одно решение* $u_0 \in \overline{B}$*.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $A_k : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, заданный соотношением $A_k u = Au + u/k$. Т.к. $(A_k u, u) = (Au, u) + \|u\|^2/k$, то для $u \in \partial B$ выполняется неравенство $(A_k u, u) > 0$. Поэтому по лемме 3.15 уравнение $A_k u = 0$ имеет по крайней мере одно решение $u_k \in B$. Т.к. B — ограниченное множество, то из последовательности $\{u_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность u_{k_i}. Пусть $u_{k_i} \to u_0$, тогда $u_0 \in \overline{B}$ и $Au_0 = \lim Au_{k_i} = -\lim u_{k_i}/k_i = 0$.

Теорема 3.1 ([26]). *Пусть*

1) $0 \in D$;

2) $A : \overline{D} \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах, удовлетворяет условию* (O);

3) $\forall u \in \partial D$ *выполняется неравенство* (3.2) : $\quad (Au, u) \geqslant 0$.

Тогда $\exists \{u_n\} \subset \overline{D}$ *такая, что*

1) $\{u_n\} \in E_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\forall u \in E_n \ (Au_n, u) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$;

3) $Au_n \rightharpoonup 0$.

Доказательство. Введем в E_n структуру евклидова пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_n$ и ортонормированным базисом $e_1, \dots e_n$. В $\overline{D}_n = E_n \bigcap \overline{D}$ построим непрерывный оператор $A_n : \overline{D}_n \to E_n$, действующий по правилу: $\forall u \in \overline{D}_n$ положим $(A_n u, e_i)_n = (Au, e_i)$, $\ i = 1, \dots, n$. Из построения A_n $\forall u \in \overline{D}_n$ и $\forall v \in E_n$ вытекает $(A_n u, v)_n = (Au, v)$. Из оценки (3.2) получим $\forall v \in \partial D_n$ $(A_n u, v)_n \geqslant 0$, из леммы 3.16 теперь следует $\exists u_n \in \overline{D}_n$, $(A_n u_n, v)_n = (Au_n, v) = 0$ $\forall v \in E_n$. Т.к. D ограниченное множество и $\{u_n\} \subset \overline{D}$, то построенная последовательность ограничена. А из равенства $(A_n u_n, u_n)_n = (Au_n, u_n) = 0$ и условия (O) вытекает теперь ограниченность $\{Au_n\}$. Кроме этого $\forall v \in L = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} E_n$ $\exists m$ такое, что $\forall n \geqslant m$ $v \in E_n$, поэтому при $n \geqslant m$ $(A_n u_n, v)_n = 0$. Таким образом мы доказали, что последовательность $\{Au_n\}$ ограничена и $\lim (Au_n, v) = 0$ $\forall v \in L$, где $\overline{L} = E$, поэтому из теоремы 1.1 (Банаха-Штейнгауза) получим $Au_n \rightharpoonup 0$.

Теорема 3.1 дает представление о скорости сходимости галеркинских приближений. Действительно, справедливы следующие следствия этой теоремы:

Следствие 3.1 ([26]). *Пусть*

1) $0 \in D$;

2) $A : \overline{D} \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и монотонен;*

3) $\forall u \in \partial D$ *выполняется неравенство* (3.2) : $\quad (Au, u) \geqslant 0$.

Тогда

1) *уравнение* (3.1) *имеет в* $\overline{D}$ *хотя бы одно решение;*

2) *если оператор* A *строго монотонен, то уравнение* (3.1) *имеет в* $\overline{D}$ *единственное решение* u_0 *и последовательность элементов* $\{u_n\}$ *из теоремы* 3.1

слабо в E сходится к u_0, причем справедлива оценка

$$0 \leqslant (Au_n, u_n - u_0) \leqslant C\delta_n(u_0), \quad \delta_n(u_0) = \inf\{\|u_0 - u\|, \ u \in E_n\} \tag{3.3}$$

3) *если оператор строго монотонен и удовлетворяет условию (S_+), то последовательность $\{u_n\}$ сильно в E сходится к u_0.*

Доказательство. 1) по лемме 3.2 оператор A удовлетворяет условию (O), а по лемме 3.6 он удовлетворяет условию (M_2), поэтому по теореме 3.1 в $\overline{D}$ найдется последовательность $\{u_n\}$ элементов удовлетворяющая заключениям этой теоремы. Т.к. D — ограниченное множество, а E – рефлексивное пространство, то из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$. Пусть $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$, тогда, т.к. D — выпуклое множество, то $u_0 \in \overline{D}$. Теперь из условий $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$, $(Au_{n_k}, u_{n_k}) = 0$, (M_2), оценки (3.2) и леммы 3.13 получим $Au_0 = 0$;

2) если A строго монотонен, то равенство $Au = Av$ возможно лишь при условии $u = v$, т.е. уравнение (3.1) может иметь не более одного решения, и слабая сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u_0 вытекает из единственности решения уравнения (3.1) и леммы 1.2.

Т.к. $u_n \in E_n$, $Au_0 = 0$ и $\forall v \in E_n$ справедливо равенство $(Au_n, v) = 0$ и цепочка соотношений

$$0 \leqslant (Au_n - Au_0, u_n - u_0) = (Au_n, u_n - u_0) = (Au_n, v - u_0),$$

то оценка (3.3) вытекает из условий

$$0 \leqslant (Au_n, u_n - u_0) = (Au_n, v - u_0) \leqslant \|Au_n\| \cdot \|u_0 - v\|, \ \forall v \in E_n.$$

3) если оператор строго монотонен и удовлетворяет условию (S_+), то сильная сходимость $\{u_n\}$ к u_0 следует из условий: $u_n \rightharpoonup u_0$, $(Au_n, u_n - u_0) = (Au_n, u_0) \to 0$.

Следствие 3.2 ([26]). *Пусть условиях следствия* 3.1 *оператор A является сильно монотонным. Тогда*

1) *уравнение* (3.1) *имеет в $\overline{D}$ единственное решение u_0;*

2) *последовательность элементов $\{u_n\}$ из теоремы* 3.1 *сильно в E сходится к u_0;*

3) *справедлива оценка*

$$m(u_n, u_0) \leqslant C\delta_n(u_0), \tag{3.4}$$

где последовательность $\{\delta_n(u_0)\}$ определена в формуле (3.3).

Доказательство. Т.к. сильно монотонный оператор является строго монотонным, то из следствия 3.1 вытекает, что $\{Au_n\}$ слабо в E сходится к 0, $\{u_n\}$ слабо в E сходится к u_0 и $Au_0 = 0$, а

$$m(u_n, u_0) \leqslant (Au_n - Au_0, u_n - u_0) = (Au_n, u_n - u_0) = -(Au_n, u_0) \to 0,$$

что доказывает сильную сходимость $\{u_n\}$ к u_0. Оценка (3.4) как и в предыдущей лемме вытекает из цепочки соотношений

$$m(u_n, u_0) \leqslant (Au_n - Au_0, u_n - u_0) \leqslant \|Au_n\| \|v - u_0\|, \ \forall v \in E_n.$$

Следствие 3.3 ([26]). *Пусть $A : E \to E^*$ является сильно монотонным и радиально непрерывным. Тогда справедливы заключения следствия* 3.2.

Доказательство. Из леммы 3.1 вытекает локальная ограниченность оператора A, а из леммы 3.12 следует, что оператор A деминепрерывен и удовлетворяет условию (O). Из определения 3.2 сильной монотонности вытекает оценка $(Au - A0, u) \geqslant m(u, 0)$, и, следовательно,

$$(Au, u) \geqslant (m(u, 0)/\|u\| - \|A0\|) \cdot \|u\| \geqslant 0 \ \ \forall u, \|u\| = R$$

и достаточно большим $R \geqslant m(u, 0)/\|A0\|$ (в предположении, что $u = 0$ не является решением исходной задачи) . Поэтому в шаре $\{u \in E : \|u\| \leqslant R\}$ выполняются условия следствия 3.2.

Теорема 3.2 ([26]). *Пусть*

1) $0 \in D$;

2) $A : \overline{D} \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах, удовлетворяет условиям* (O), (M_0);

3) $\forall u \in \partial D$ *выполняется неравенство* (3.2).

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение.*

Доказательство. К условиям теоремы 3.1 добавлено условие (M_0), поэтому выполняются заключения теоремы 3.1, а доказательство существования решения уравнения (3.1) аналогично таковому в следствии 3.1.

Следствие 3.4 ([26]). *Пусть*

1) $A : \overline{D} \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условиям* (O_1), (M_0);

2) $\exists v \in D$ *такое, что* $(Au, u - v) \geqslant 0 \ \ \forall u \in \partial D$.

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение.*

Доказательство. Введем оператор B по правилу $Bu = A(u + v)$ и применим теорему 3.2.

Теорема 3.3 ([26]). *Пусть*

1) *пространство* E^* *строго выпукло;*

2) $A : E \to E^*$ *ограничен и удовлетворяет условию* (M_2);

3) $\exists R > 0$, $\forall u$: $\|u\| \geqslant R$, $(Au, u) > -\|Au\| \|u\|$.

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение* u_0 *с* $\|u_0\| \leqslant R$.

Доказательство. 1) По лемме 2.2 существует оператор двойственности $J: E \to E^*$ такой, что J монотонен, деминепрерывен, $(Ju, u) = \|Ju\| \|u\|$, $\|Au\| / \|Ju\| \to 0$ при $\|u\| \to \infty$, $(Ju, u) > 0$ при $u \neq 0$;

2) из условия 2 теоремы 3.3 следует, что A деминепрерывен (см. замечание 3.1);

3) по замечанию 3.9 оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$ удовлетворяет условию (M_2);

4) пусть $u \in E$ и $\|u\| \geqslant R$, тогда

$$(A_\varepsilon u, u) = (Au, u) + \varepsilon (Ju, u) > (\varepsilon - \|Au\| / \|Ju\|) \cdot (Ju, u).$$

Т.к. $\|Au\| / \|Ju\| \to 0$ при $\|u\| \to \infty$, то при достаточно большом $R_1 = R_1(\varepsilon)$ получим при всех u с $\|u\| = R_1$ неравенство $(A_\varepsilon u, u) > 0$. По теореме 3.2 уравнение $A_\varepsilon u = 0$ имеет решение $u = u_\varepsilon$;

5) докажем, что $\|u_\varepsilon\| \leqslant R$. Предположим противное, т.е. $\|u_\varepsilon\| > R$, тогда $0 = (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon) > -\|Au_\varepsilon\| \|u_\varepsilon\| + \varepsilon \|Ju_\varepsilon\| \|u_\varepsilon\|$, т.е. $\|Au_\varepsilon\| > \varepsilon\|Ju_\varepsilon\|$, из уравнения $A_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ получим $\|Au_\varepsilon\| = \varepsilon\|Ju_\varepsilon\|$, что противоречит предыдущему неравенству;

6) т.к. $\|Au_\varepsilon\| = \varepsilon\|Ju_\varepsilon\|$ и оператор J ограничен, то $\|Au_\varepsilon\| \to 0$ и $(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Из ограниченности последовательности $\{u_\varepsilon\}$ следует, что из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$, $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$ при $\varepsilon_n \to +0$. Из условия (M_2) и леммы 3.11 получим $Au_0 = 0$.

Следствие 3.5 ([26]). *Пусть*

1) $A: E \to E^*$ *ограничен и удовлетворяет условию* (M_2);

2) $\exists R > 0$, $\exists b < 1$ *такие, что* $\forall u$, $\|u\| \geqslant R$ *выполняется неравенство* $(Au, u) \geqslant -b \|Au\| \|u\|$.

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение* u_0 *с* $\|u_0\| \leqslant R$.

Доказательство. Если $b \leqslant 0$, то справедливость следствия 3.5 вытекает из теоремы 3.2, поэтому будем считать, что $b \in (0; 1)$. Возьмем $a \in \left(1; b^{-1/2}\right)$. В пространстве E введем норму такую же, как в теореме 1.7, тогда E и E^* становятся строго выпуклыми пространствами, причем $\forall u$ с $\|u\|_a \geqslant aR$ имеем $\|u\| \geqslant a^{-1}\|u\|_a \geqslant R$, т.е. выполняется оценка

$$(Au, u) \geqslant -b \|Au\| \|u\| \geqslant -ba^2 \|Au\|_a \|u\|_a > -\|Au\|_a \|u\|_a.$$

Из теоремы 3.3 теперь следует существование решения u_0 уравнения (3.1) с $\|u_0\| \leqslant a\|u_0\|_a \leqslant a^2 R$. Т.к. число a можно выбрать произвольно из интервала $\left(1; b^{-1/2}\right)$, то $\|u_0\| \leqslant R$.

Теорема 3.4 ([26]). *Пусть*

1) *пространство* E^* *строго выпукло;*

2) $A: E \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условиям* (M_2), (O);

3) $\exists R > 0$ *и* $\exists C > 0$ *такие, что* $\forall u$ *с* $\|u\| \geqslant R$ *выполняется неравенство* $(Au, u) \geqslant -C\|u\|$;

4) *множество* $\{u \in E: \ \|Au\| \leqslant C\}$ *ограничено.*

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение.*

Доказательство. 1) для функции $\varphi(t) = t$ по теореме 1.6 существует монотонный деминепрерывный ограниченный оператор двойственности $J: E \to E^*$, удовлетворяющий условиям $\|Ju\| = \|u\|$, $(Ju, u) = \|u\|^2$;

2) из замечания 3.9 следует, что $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$, $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (M_2), а т.к. J ограничен, а A удовлетворяет условию (O), то из леммы 3.3 следует справедливость условия (O) и для A_ε;

3) $\forall u$ с $\|u\| \geqslant R$ имеем

$$(A_\varepsilon u, u) = (Au, u) + \varepsilon\,(Ju, u) \geqslant -C\|u\| + \varepsilon\|u\|^2 = \varepsilon\|u\|\,(\|u\| - C/\varepsilon) > 0,$$

$\forall u$, $\|u\| \geqslant R + C/\varepsilon$, поэтому по теореме 3.2 уравнение $A_\varepsilon u = 0$ имеет решение u_ε, $\|u_\varepsilon\| \leqslant R + C/\varepsilon$;

4) докажем, что последовательность u_ε ограничена. Пусть $\|u_\varepsilon\| \geqslant R$, тогда $0 = (Au_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon\,(Ju_\varepsilon,\ u_\varepsilon) \geqslant -C\|u_\varepsilon\| + \varepsilon\|u_\varepsilon\|^2$, т.е. $\|u_\varepsilon\| \leqslant C/\varepsilon$, но $Au_\varepsilon = -\varepsilon Ju_\varepsilon$ и, следовательно, $\|Au_\varepsilon\| = \varepsilon\,\|Ju_\varepsilon\| = \varepsilon\|u_\varepsilon\| \leqslant C$. Из условия 4 теоремы 3.4 теперь следует, что последовательность u_ε ограничена;

5) т.к.последовательность u_ε ограничена и $\|Au_\varepsilon\| = \varepsilon\,\|Ju_\varepsilon\| = \varepsilon\|u_\varepsilon\|$, то $Au_\varepsilon \to 0$ и $(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Т.к. последовательность u_ε ограничена, то из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_n\}$, $u_n = u_{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n \to +0$, $u_n \rightharpoonup u_0$. Тогда $Au_n \to 0$, $(Au_n, u_n) \to 0$ и из условия (M_2) получим $(Au_0, u - u_0) \geqslant 0$ при всех $u \in E$, т.е. $Au_0 = 0$.

Аналогично с использованием следствия 3.5 доказываются :

Следствие 3.6 ([26]). *Пусть*

1) $A: E \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условиям* (M_2), (O);

2) $\exists R > 0$ *и* $\exists C > 0$ *такие, что* $\forall u$ *с* $\|u\| \geqslant R$ *выполняется неравенство* $(Au, u) \geqslant -C\|u\|$;

3) *для некоторого* $C_1 > C$ *множество* $\{u \in E: \ \|Au\| \leqslant C_1\}$ *ограничено.*

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение.*

Теорема 3.5 ([26]). *Пусть*

1) $A: E \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условиям* (M_1), (O);

2) $\exists R > 0$ *и* $\exists C > 0$ *такие, что* $\forall u$ *с* $\|u\| \geqslant R$ *выполняется неравенство* $(Au, u) \geqslant -C\|u\|$;

3) *для некоторого* $d \geqslant 1$ *существует слабо непрерывный оператор* $F: E \to E^*$ *удовлетворяющий* $\forall u \in E$ *условиям* $(Fu, u) \geqslant \|u\|^2$, $\|Fu\| \leqslant d\|u\|$;

4) *множество* $\{u \in E: \ \|Au\| \leqslant dC\}$ *ограничено.*

Тогда уравнение (3.1) *имеет решение.*

Замечание 3.11. *В работе Лионса* [14] *на с.* 187 *утверждается: отображение двойственности* J *рефлексивного банахова пространства со строго выпуклым сопряженным является слабо непрерывным отображением. С учетом этого высказывания и леммы* 2.1 *в теореме* 3.5 *можно отбросить условие* 3, *кроме этого условия теорем* 3.3, 3.4 *можно можно ослабить, заменив условие* (M_2) *для оператора* A *на* (M_1).

Глава 4

Аппроксимации некоторых уравнений и вариационных неравенств с операторами типа (M)

4.1 О сходимости одной аппроксимации

В этом параграфе мы будем предполагать, что E – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, D – открытое выпуклое ограниченное подмножество из E, функция $g : [0; \varepsilon_0] \to [a; b]$, $0 < a \leqslant b$, $F_\varepsilon = g(\varepsilon)F + \varepsilon A$.

Лемма 4.1 ([26]). *Пусть* 1) *оператор* $A : \overline{D} \to E^*$ *непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условию* (M_2)*;*

2) *оператор* $F : E \to E^*$ *– монотонный и радиально непрерывный;*

3) *для некоторой последовательности* ε_n *положительных чисел таких, что* $\varepsilon_n \to +0$ *уравнение*

$$g(\varepsilon)Fu + \varepsilon Au = 0 \tag{4.1}$$

имеет решение u_n *при* $\varepsilon = \varepsilon_n$ *такое, что* $u_n \rightharpoonup u_0$, $Au_n \rightharpoonup f$.

Тогда 1) $u_0 \in K$, *где*

$$K = \{u \in E : Fu = 0\}; \tag{4.2}$$

2) $(f, u - u_0 \geqslant 0$ *при всех* u *из* K*;*

3) $(Au_0 - f, u - u_0) \geqslant 0$ *при всех* u *из* $\overline{D}$.

Доказательство. Т.к. последовательность $\{Au_n\}$ ограничена, то

$Fu_n = -\varepsilon_n Au_n/g(\varepsilon_n) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $(Fu_n, u_n) \to 0$.

По лемме 3.11 получим $Fu_0 = 0$, т.е. $u_0 \in K$.

Для произвольного $u \in K$ из монотонности оператора F получим

$$(Au_n, u_n - u) = -g(\varepsilon_n)/\varepsilon_n(Fu_n - Fu, u_n - u) \leqslant 0,$$

т.е.

$$\overline{\lim}(Au_n, u_n) \leqslant (f, u), \ \forall u \in K.$$

Т.к. оператор A удовлетворяет условию M_2, то из последних двух неравенств при $u = u_0$ получим $\lim(Au_n, u_n) = (f, u_0)$ и $(Au_0 - f, u - u_0) \geqslant 0$ при всех u из $\overline{D}$. Лемма 4.1 доказана.

Теорема 4.1 ([24]). *Пусть* 1) *оператор $A : \overline{D} \to E^*$ непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условию (M_2), оператор $F : E \to E^*$ – монотонный и радиально непрерывный;*

2) $0 \in D \cap K$, *где K определено в* (4.2)*;*

3) *выполняется одно из условий:*

а) *$A = B + C$, где B имеет полуограниченную вариацию, а C – слабо непрерывный оператор со слабо полунепрерывным снизу функционалом (Cu,u);*

б) *оператор A – ограничен;*

в) *оператор F ограничен, а оператор A удовлетворяет условию (O);*

4) *для всех u из ∂D выполняется неравенство* $(Au, u) \geqslant 0$.

Тогда 1) *уравнение* (4.1) *имеет решение $u_\varepsilon \in \overline{D}$ при любом $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$;*

2) *множество $\{Au_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ ограничено;*

3) *любая слабо предельная точка множества $\{u_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$ является решением вариационного неравенства* (ВН)*: найти*

$$u_0 \in K : \ (Au_0, u - u_0) \geqslant 0, \ \forall u \in K; \tag{4.3}$$

4) *если ВН* (4.3) *имеет единственное решение u_0, то $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$, при $\varepsilon \to +0$;*

5) *если ВН* (4.3) *имеет единственное решение и оператор A удовлетворяет условию (S_+), то $u_\varepsilon \to u_0$;*

6) *если оператор A сильно монотонен, то $u_\varepsilon \to u_0$.*

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов.

1) из условий теоремы, лемм 3.2, 3.3, 3.8 получим: A, F, $F_\varepsilon = g(\varepsilon)F + \varepsilon A$ при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ удовлетворяют условиям (O) и (M_2);

2) т.к. $0 \in K$, то $(Fu, u) \geqslant 0$ при всех $u \in E$ (это является следствием монотонности оператора F и условия $F0 = 0$), поэтому из условия 4) теоремы следует неравенство $(F_\varepsilon u, u) \geqslant 0$ при всех u из ∂D. Из теоремы 3.2 теперь следует, что уравнение (4.1) имеет решение $u_\varepsilon \in \overline{D}$ при всяком $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$;

3) т.к. $0 \leqslant (Fu_\varepsilon, u_\varepsilon) = -\varepsilon(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)/g(\varepsilon)$, то $(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant 0$, и из условия (O) для оператора A следует теперь ограниченность множества $\{Au_\varepsilon\}$;

4) как и в лемме 4.1 получим, что $Fu_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$;

5) т.к. пространство E рефлексивно, то (см. теорему 1.4) можно выбрать такие последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to +0$, $\{u_n\}$, $u_n = u_{\varepsilon_n}$, $\{Au_n\}$, что $u_n \rightharpoonup u_0$, $Au_n \rightharpoonup f$ при $n \to \infty$. Применяя лемму 4.1, получим $u_0 \in K$, $(f, u - u_0) \geqslant 0$ при всех $u \in K$, $(Au_0 - f, u - u_0) \geqslant 0$ при всех u из $\overline{D}$, а из леммы 3.14 (с использованием условий 2 и 4 теоремы) получим $Au_0 = f$, что доказывает заключение 3 теоремы;

6) если ВН 4.3 имеет единственное решение u_0, то по лемме 1.2 $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$;

7) если дополнительно оператор A удовлетворяет условию S_+, то из условия $0 \leqslant (Fu_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) = -\varepsilon(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0)/g(\varepsilon)$ получим, что $u_\varepsilon \to u_0$;

8) если же оператор A сильно монотонен, то ВН (4.3) в условиях теоремы имеет единственное решение, поэтому $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$, кроме этого, т.к. $(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) \leqslant 0$, то

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant (Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0) \leqslant (-Au_0, u_\varepsilon - u_0) \to 0,$$

поэтому $u_\varepsilon \to u_0$.

Теорема доказана полностью.

Теорема 4.2 ([26]). *Пусть* 1) *выполняется условие* 1 *теоремы* 4.1*;*

2) *выполнено одно из условий* 3а, 3б *теоремы* 4.1 *или оператор A удовлетворяет условию (O_1), а оператор F ограничен;*

3) *$\exists v \in K \cap D$ такой, что для любого u из ∂D выполняется неравенство $(Au, u - v) \geqslant 0$.*

Тогда справедливы заключения теоремы 4.1*.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

Из теоремы 4.2 как следствие можно получить некоэрцитивное условие разрешимости вариационного неравенства для некоторого класса операторов монотонного типа. Этот факт отмечен в замечании 4.1 работы [26].

Теорема 4.3. *Пусть* 1) *E и E^* – строго выпуклые пространства;*

2) *K – непустое замкнутое выпуклое подмножество E;*

3) *оператор $A : \overline{D} \to E^*$ непрерывен на конечномерных подпространствах и удовлетворяет условию (M_2);*

4) *выполняются условия* 2, 3 *теоремы* 4.2*.*

Тогда вариационное неравенство (4.3) *имеет решение u_0 принадлежащее подмножеству $\overline{D}$.*

Доказательство. Пусть 1) $J : E \to E^*$ – оператор двойственности относительно функции φ (см. определение 1.2);

2) $P_K : E \to K$ – оператор проектирования, т.е. $\|u - P_K u\| \leqslant \|u - v\|$ при всех $v \in K$;

3) $Fu = J(u - P_K u)$ оператор штрафа связанный с множеством K (см. [14] теорема 5.1), таким образом оператор F монотонный, деминепрерывный и $K = \{u \in E : Fu = 0\}$;

4) заключение теоремы 4.3 вытекает из заключения теоремы 4.2. Теорема доказана.

Замечание 4.1. *Можно доказать теорему* 4.3 *при более слабых ограничениях* [27]*. В частности*

условие 3 *теоремы* 4.3 *можно заменить на следующее:*

$\exists v \in K \cap D$ такой, что для любого u из $\partial D \cap K$ выполняется неравенство $(Au, u - v) \geqslant 0$.

А условие 2 на такое:

Оператор A является ограниченным псевдомонотонным оператором.

Замечание 4.2. *Если $g(\varepsilon) \equiv 1$, то ε_0 в формулировках леммы 4.1 и теорем 4.1, 4.2 можно брать равным $+\infty$.*

Замечание 4.3. *Рассмотрим уравнение*

$$Fu + \varepsilon Tu = 0, \ \varepsilon > 0, \tag{4.4}$$

где $T = (1/\delta)(A - F)$, $\delta > 0$, а операторы F и A удовлетворяют условиям теоремы 4.1 или 4.2.

Тогда справедливы заключения этих теорем с заменой всюду в формулировках заключений этих теорем оператора A на оператор T, т.к. уравнение (4.4) при $\varepsilon_0 = \delta/2$ эквивалентно уравнению:

$$g(\varepsilon)Fu + \varepsilon Au = 0, \ g(\varepsilon) = \delta - \varepsilon,$$

которое удовлетворяет условиям цитируемых выше теорем.

Это замечание позволяет изменять свойства оператора A за счет оператора F.

Из теорем 4.1, 4.2 вытекают следующие следствия, доказательства которых состоят в проверке условий этих теорем.

Следствие 4.1 ([26]). *Пусть 1) операторы $A, F : E \to E^*$ монотонны и радиально непрерывны;*

2) $0 \in K$;

3) для некоторого $R > 0$ и всех u из E таких, что $\|u\| = R$ выполняется неравенство $(Au, u) \geqslant 0$.

Тогда при любом $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ уравнение (4.1) имеет решение u_ε с $\|u_\varepsilon\| \leqslant R$ и справедливы заключения 2–6 теоремы (4.1).

Следствие 4.2 ([26]). *Пусть 1) операторы $A, F : E \to E^*$ монотонны и радиально непрерывны;*

2) $K \neq \varnothing$;

3) для некоторого $R > 0$, $v \in K$, $\|v\| < R$ и всех u из E таких, что $\|u\| = R$ выполняется неравенство $(Au, u - v) \geqslant 0$.

Тогда при любом $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ уравнение (4.1) имеет решение u_ε с $\|u_\varepsilon\| \leqslant R$ и справедливы заключения 2–6 теоремы (4.1).

Определение 4.1. *Оператор $A : E \to E^*$ называется коэрцитивным, если $(Au, u)/\|u\| \to +\infty$ при $\|u\| \to +\infty$.*

Замечание 4.4. *Условие* 3 *следствия* (4.2) *выполняется, если*

1) *оператор* A *коэрцитивен;*

2) *для всех* u *из* E *справедливо неравенство* $\|Au\| \leqslant M\|u\| + L$.

Действительно в этом случае
$(Au, u - v) \geqslant (Au, u) - \|Au\|\|v\| \geqslant \|u\|((Au, u)/\|u\| - M\|v\| - L\|v\|/\|u\|)$, *т.е.* $(Au, u - v) \to +\infty$ *при* $\|u\| \to +\infty$

Замечание 4.5. *Условие* 3 *следствия* (4.2) *выполняется, если*

1) $(Au, u)/\|Au\| \to +\infty$;

Действительно в этом случае
$(Au, u-v) \geqslant ((Au, u)/\|Au\| - \|v\|)\|Au\| \geqslant 0$ *при* $\|u\| = R$ *и достаточно больших* $R > 0$.

Замечание 4.6. *Следствие* 4.2 *является обобщением теоремы* 1 *из* [1]. *Обобщение состоит в отказе от равномерной выпуклости пространства* E *и требования специального вида монотонного оператора* A.

Замечание 4.7. *Условие* 3 *следствия* (4.2) *выполняется, если оператор* A *является сильно монотонным, т.к. в этом случае при* $\|u\| \to +\infty$ *имеем*

$$(Au, u - v) \geqslant m(u, v) + (Av, u - v) \geqslant \|u - v\|(m(u, v)/\|u - v\| - \|Av\|) \to +\infty$$

Теорема 4.4 ([24]). *Пусть* 1) $F : E \to E^*$ *– радиально непрерывный коэрцитивный и монотонный оператор;*

2) *оператор* $A : E \to E^*$ *удовлетворяет условию* M_2 *и при некоторых положительных* R, C *и всех* u *с* $\|u\| \geqslant R$ *справедлива оценка* $(Au, u) \geqslant -C\|u\|$;

3) *выполняется условие* 2) *теоремы* 4.2.

Тогда справедливы заключения теоремы 4.1

Доказательство. 1) т.к. оператор F коэрцитивен, то при некотором $R_1 > 0$ и всех u с $\|u\| = R_1$ имеет место неравенство $(Fu, u) \geqslant 0$. По теореме 3.1 уравнение $Fu = 0$ имеет решение, поэтому $K \neq \varnothing$

2) при любом $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и всех u с $\|u\| \geqslant R$ справедливо неравенство

$$(Fu + \varepsilon/g(\varepsilon)Au, u) \geqslant ((Fu, u)/\|u\| - \varepsilon C/g(\varepsilon))\|u\|;$$

И, т.к. F коэрцитивен, то правая часть последнего неравенства положительна при всех u с $\|u\| = R_2$ с достаточно большим $R_2 = R_2(\varepsilon)$. Поэтому уравнение 4.1 имеет решение $u = u_\varepsilon$;

3) докажем от противного, что множество $\{u_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ ограничено. Действительно, пусть существует последовательность $\varepsilon_n \in (0; \varepsilon_0)$ такая, что $u_n = u_{\varepsilon_n}$ и $\|u\|_n \to +\infty$, тогда

$$0 = (Fu_n + \varepsilon_n/g(\varepsilon_n)\ Au_n, u_n) \geqslant ((Fu_n, u_n)/\|u_n\| - C\varepsilon_n/g(\varepsilon_n))\|u_n\| \to +\infty$$

при $n \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает ограниченность множества $\{u_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$;

4) т.к. $K \neq \varnothing$, то для произвольного v из K получим

$$0 \leqslant g(\varepsilon)/\varepsilon(Fu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) = -(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v),$$

т.е. $(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leqslant 0$ при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, а из условия (O_1) для оператора A следует ограниченность множества $\{Au_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$. Далее доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1. Теорема 4.4 доказана.

Замечание 4.8. *Теорема* 4.4 *является обобщением теоремы* 3.7 *из гл.* 3 *в* [8].

4.2 Один способ получения оценки скорости сходимости

В этом разделе мы предполагаем, что операторы A, F, F_1 и F_2 действуют из E в E^* и являются радиально непрерывными и монотонными. Оператор A предполагается сильно монотонным. Непрерывные полунормы $r(\cdot)$, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям подчинения: $p(\cdot) \leqslant C\|\cdot\|$, $r(\cdot) \leqslant C_1 p(\cdot)$.

Теорема 4.5 ([26]). *Пусть* 1) *множество* $K = \{u \in E : Fu = 0\}$ *не пусто;*

2) $F = F_1 + F_2$ *и для любого* u *из* E *найдутся три такие элемента из* E*:* u^+, u^- *и* u^*, *что* $u = u^+ + u^-$, $v = u^+ - u^* \in K$ *и* $(F_2 u, u^+ - v) \geqslant 0$ *при всех* v *из* K.

Тогда 1) *уравнение*

$$Fu + \varepsilon Au = 0,\ \varepsilon > 0 \qquad (4.5)$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon \to +0$ $u_\varepsilon \to u_0$*;*

2) u_ε *– единственное решение ВН:*

$$(Au_0, u - u_0) \geqslant 0,\ \forall u \in K; \qquad (4.6)$$

3) *справедлива оценка:*

$$(F_1 u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2 u_\varepsilon, u_\varepsilon^-) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant -\varepsilon(Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Заключения 1, 2 теоремы 4.5 вытекают из следствия 4.2, т.к. $u_0 \in K$, то

$$(Fu_\varepsilon - Fu_0, u_\varepsilon - u_0) = (Fu_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) =$$
$$=(F_1 u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2 u_\varepsilon, u_\varepsilon^+ - u_0) + (F_2 u_\varepsilon, u_\varepsilon^-) \geqslant (F_1 u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2 u_\varepsilon, u_\varepsilon^-).$$

Т.к. u_0 является решением ВН 4.6, то
$(Au_0, u_0 - u_\varepsilon) = (Au_0, u_0 - u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^*) - (Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-) \leqslant -(Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-)$.

Кроме этого из 4.5 получим $Fu_\varepsilon - Fu_0 + \varepsilon(A_\varepsilon - Au_0) = -Au_0$. Объединяя эти соотношения и используя сильную монотонность оператора A, получим

$$(F_1 u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + (F_2 u_\varepsilon, u_\varepsilon^-) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant$$
$$\leqslant(Fu_\varepsilon - Fu_0 + \varepsilon(Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0)) = -(Au_0, u_\varepsilon - u_0) \leqslant -(Au_0, u_\varepsilon^* + u_\varepsilon^-),$$

т.е. неравенство (4.7). Теорема 4.5 доказана.

Сформулируем и докажем несколько следствий из этой теоремы

Следствие 4.3 ([26]). *Пусть* 1) *выполняется условие* 1 *теоремы* 4.5*;*

2) *для произвольного* $u \in E$ *имеет место разложение* $u = u^+ + u^-$, *где* $u^+ \in K$ *и для всех* $v \in K$ *выполняется неравенство* $(Fu, u^+ - v) \geqslant 0$.

Тогда справедливы заключения 1, 2 *теоремы* 4.5 *и оценка*

$$(Fu_\varepsilon, u_\varepsilon^-) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant -\varepsilon(Au_0, u_\varepsilon^-). \tag{4.8}$$

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 4.5, если в ее условиях положить $F_1 = 0$, $u^* = 0$.

Следствие 4.4 ([26]). *Пусть* 1) *выполняется условие* 1 *теоремы* 4.5*;*

2) *числа* $\tau \in [0; 1)$, $\mu > 0$, $m > 0$, *и* $C_2 > 0$ *такие, что для любых* u, v *из* E *выполняются неравенства:*

$(Fu, u^-) \geqslant \mu p^2(u^-)$,

$(Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^2$,

$|(Au_0, v)| \leqslant C_2 p(v)^{1-\tau}\, \|v\|^\tau$.

Тогда справедливо следующее уточнение оценки (4.8)

$$p(u_\varepsilon^-) \leqslant C_2(\varepsilon/\mu)^{(2-\tau)/2}\, (1/m)^{\tau/2} \tag{4.9}$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant C_2(\varepsilon/\mu)^{(1-\tau)/2}\, (1/m)^{(1+\tau)/2}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Введем обозначения

$x = \sqrt{\mu} p(u_\varepsilon^-)$, $y = \sqrt{m}\|u_\varepsilon - u_0\|$, $a = C_2(1/\mu)^{(1-\tau)/2}\, (1/m)^{\tau/2}$.

Тогда неравенство (4.8) запишется в виде

$x^2 + \varepsilon y^2 \leqslant \varepsilon a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$, т.е. $x^2 \leqslant \varepsilon a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$, и $y^2 \leqslant a\, x^{1-\tau}\, y^\tau$.

Тогда из первого неравенства и второго неравенства получим

$$x \leqslant\ (\varepsilon\, a\, y^\tau)^{1/(1+\tau)},\ y^2 \leqslant a(\varepsilon a y^\tau)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} y^\tau = a^{\frac{2}{1+\tau}} \varepsilon^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} y^{\frac{2\tau}{1+\tau}},$$

тогда $y \leqslant a\, \varepsilon^{(1-\tau)/2}$ и, следовательно, $x \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{1+\tau}} a^{\frac{1}{1+\tau}} a^{\frac{\tau}{1+\tau}} \varepsilon^{\frac{\tau(1-\tau)}{2(1+\tau)}} = a\varepsilon^{\frac{2+\tau-\tau^2}{2(1+\tau)}}$, т.е. $x \leqslant a\, \varepsilon^{(2-\tau)/2}$, что с учетом введенных обозначений совпадает с неравенствами (4.9) и (4.10). Следствие доказано.

Следствие 4.5 ([26]). *Пусть* 1) *выполняются условия* 1 *теоремы* 4.5*;*

2) *числа* $\tau \in (0; 1]$, $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ *и* μ, m, C_2, C_3, C_4 *– положительные числа такие, что для любых* u, v *из* E *выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
&p(u^-) \leqslant p(u),\\
&r(u^*) \leqslant r(u),\\
&p(u^*) \leqslant p(u), q(u^*) \leqslant C_2 r(u),\\
&(F_1 u, u - u_0) \geqslant \alpha\, r^2(u) + \lambda\, p^2(u),\\
&(F_2 u, u^-) \geqslant \mu\, q^2(u^-),\\
&(Au - Av, u - v) \geqslant m\, \|u - v\|^2,
\end{aligned}$$

а для элемента u_0 *выполняются соотношения:*

$p(u_0) = 0,$

$|(Au_0, v)| \leqslant C_3 q(v) + C_4 r^{1-\tau}(v)\, p^\tau(v).$

Тогда справедливо следующее уточнение оценки (4.7)*:*

1) *при* $\alpha > 0,\ \lambda > 0,\ \tau \in (0;1)$ *имеем:*

$$\begin{aligned} &r(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\alpha},\\ &p(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\lambda},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon C_5/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C_5/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{4.11}$$

2) *при* $\alpha > 0,\ \lambda = 0,\ \tau \in (0;1)$ *имеем:*

$$\begin{aligned} &r(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon^{(2-\tau)/2} C_6/\sqrt{\alpha},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon^{(2-\tau)/2} C_6/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant 2\varepsilon^{(1-\tau)/2} C_6/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{4.12}$$

3) *при* $\alpha \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ \tau = 1$ *имеем:*

$$\begin{aligned} &\sqrt{\alpha} r(u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon C_7,\\ &p(u_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon C_7/\sqrt{\lambda},\\ &q(u_\varepsilon^-) \leqslant 2\varepsilon C_7/\sqrt{\mu},\\ &\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C_7/\sqrt{m}; \end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$C_5 = \sqrt{\frac{(C_2C_3+2C_4)^2}{4\alpha} + \frac{C_3^2}{4\mu} + \frac{(1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau}\tau^2 C_4^2}{\lambda}},$

$C_6 = \sqrt{\frac{(C_2C_3+2C^\tau C_4)^2}{4\alpha} + \frac{C_3^2}{4\mu} + \frac{(1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau}\tau^2 C^{2\tau} C_4^2}{m}},$

$C_7 = \sqrt{\frac{(C_1C_2C_3+2C_4)^2}{4\lambda} + \frac{C_3^2}{4\mu}}.$

Доказательство. 1) пусть $x = r(u_\varepsilon)$, $y = p(u_\varepsilon)$, $z = q(u_\varepsilon^-)$, $w = \|u_\varepsilon - u_0\|$, тогда неравенство 4.7 с учетом условия 2 следствия 4.5 примет вид:

$\alpha\, x^2 + \lambda\, y^2 + \mu\, z^2 + \varepsilon\, m\, w^2 \leqslant \varepsilon\, (C_3 z + 2\, C_4\, x^{1-\tau} y^\tau + C_2C_3 x).$

Рассмотрим теперь случай с $\tau \in (0; 1)$.

Неравенство Юнга (см. [13], стр. 61) для произвольных положительных чисел a, b, δ и $\beta \in (0; 1)$ дает

$$ab \leqslant \delta\, a^{1/\beta} + (\beta/\delta)^{\beta/(1-\beta)}(1-\beta)\, b^{1/(1-\beta)},$$

Положим $\beta = 1 - \tau$, $\delta = \varepsilon^{-\gamma}$, $a = x^{1-\tau}$, $b = y^\tau$. Тогда последнее неравенство примет вид:

$$x^{1-\tau} y^\tau \leqslant x\varepsilon^{-\gamma} + (1-\tau)^{(1-\tau)/\tau}\tau\, \varepsilon^{\gamma(1-\tau)/\tau} y.$$

Используя последнее неравенство перепишем исходное в виде:

$$\alpha x^2 + \lambda y^2 + \mu z^2 + \varepsilon m w^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (C_3 z + (C_2 C_3 + 2 C_4 \varepsilon^{-\gamma}) x + 2 C_4 (1-\tau)^{(1-\tau)/\tau} \tau \varepsilon^{\gamma(1-\tau)/\tau} y).$$

2) пусть $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma = 0$, тогда, выделяя полный квадрат в левой части последнего неравенства, получим:

$$(\sqrt{\alpha}\, x - \varepsilon (C_2 C_3 + 2C_4)/2\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\lambda}\, y - \varepsilon C_4 (1-\tau)^{(1-\tau)/\tau} \tau/\sqrt{\lambda})^2 +$$
$$+ (\sqrt{\mu}\, z - \varepsilon C_3/2\sqrt{\mu})^2 + \varepsilon m w^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 ((C_2 C_3 + 2 C_4)^2/4\alpha + (1-\tau)^{2(1-\tau)/\tau} \tau^2 C_4^2/\lambda + C_3^2/4\mu),$$

из этого неравенства следует (4.11);

3) пусть $\alpha > 0$, $\lambda = 0$, $\tau \in (0;1)$, $\gamma = \tau/2$, тогда, используя соотношение $p(u_\varepsilon) = p(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\|u_\varepsilon - u_0\|$, получим

$$\alpha x^2 + \mu z^2 + \varepsilon m w^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (C_3 z + (C_2 C_3 + 2 C_4 \varepsilon^{-\tau/2}) x + 2\ C_4 (1-\tau)^{(1-\tau)/\tau} \tau \varepsilon^{\gamma(1-\tau)/2} w),$$

из этого неравенства также как и в 2) получим неравенство (4.12);

4) пусть $\alpha \geqslant 0$, $\lambda > 0$, $\tau = 1$, тогда

$$\alpha x^2 + \lambda y^2 + \mu z^2 + \varepsilon m w^2 \leqslant \varepsilon (C_3 z + (2 C_4 + C_1 C_2 C_3) y),$$

что дает (4.13). Следствие 4.5 доказано полностью.

Замечание 4.9. *Оценка для* $|(Au_0, u)|$ *с* $\tau > 0$ *обычно доказывается с использованием мультипликативных неравенств (см. лемму* 1.6*).*

Т.к. $r(u) \leqslant C_1\, p(u)$, *то доказательство оценки* (4.11) *можно свести к более простому доказательству оценки* (4.13), *при доказательстве оценок* (4.11, 4.12) *мы не использовали условие* $r(u) \leqslant C_1\, p(u)$, *однако это требование часто возникает естественным образом в конкретных реализациях этого следствия при использовании мультипликативных оценок. При построении схем метода фиктивных областей (МФО) для обобщенных краевых задач в* E *от этого требования в некоторых случаях можно отказаться, используя* (П) *свойство пространства* E. *Ниже при помощи этого следствия будут обоснованы некоторые схемы МФО для задачи с внутренним препятствием.*

4.3 Некоторые простые примеры применения оценок скорости сходимости

В этом разделе мы приведем несколько простых примеров применения доказанных выше оценок из теоремы 4.5 для одной задачи "штрафа" и для некоторых краевых задач с внутренним препятствием.

Пример 4.1 ([26]). *Пусть* 1) E *и* E^* *– строго выпуклые пространства;*

2) K *– непустое замкнутое выпуклое подмножество* E*;*

3) $J : E \to E^*$ *– оператор двойственности относительно функции* φ *(см. определение* 1.2*);*

4) $P_K : E \to K$ *– оператор проектирования, т.е.* $\|u - P_K u\| \leqslant \|u - v\|$ *при всех* $v \in K$*;*

5) $Fu = J(u - P_K u)$ *оператор штрафа связанный с множеством* K *(см.* [14]*) теорема* 5.1*), таким образом оператор* F *монотонный, деминепрерывный и* $K = \{u \in E : Fu = 0\}$*;*

6) $u^+ = P_K u, u^- = u - u^+$;

7) $A : E \to E^*$ *– сильно монотонный радиально непрерывный оператор.*

Тогда справедливы заключения следствия 4.3*, а оценка* (4.8) *примет вид:*

$$\|u_\varepsilon - P_K\, u_\varepsilon\| \leqslant \varphi^{-1}(\varepsilon \|Au_0\|),$$
$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant \varphi^{-1}(\varepsilon \|Au_0\|)\, \|Au_0\|.$$

Доказательство справедливости утверждений этого примера – простая проверка условий следствия 4.3.

Ниже в примерах предполагается, что $\omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса $C^{0,1}$, т.е. ω имеет регулярную границу.

Пример 4.2. *Пусть* $E = H_0^1(\omega)$ *– гильбертово пространство со скалярным произведением* $(u, v) = \int_\omega \nabla u \nabla v\, dx$ *и нормой* $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Рассмотрим задачу с внутренним препятствием:
найти $u = u_0 \in H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega)$ *такой, что*

$$\begin{aligned} &\forall x \in \omega : \quad - \triangle\, u \geqslant f,\ (\triangle\, u + f)(u - \psi) = 0, u \geqslant \psi, \\ &\text{где} \quad f \in L_2(\omega),\ \psi \in H^1(\omega)\ \text{и} \quad \psi \leqslant 0\ \forall x \in \partial\omega. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Доказательство существования решения задачи (4.14) и ее физическую интерпретацию можно найти в работах [9, 10]. Мы здесь получим оценки скорости сходимости изучаемой аппроксимации. Отметим, что ВН (4.6) имеет решение без предположения включения $u_0 \in H^2(\omega)$.

Введем формы Дирихле $A(u, v)$ и $F(u, v) : E \times E \to \mathbb{R}$ формулами

$$A(u, v) = (u, v) - \int_\omega fv\, dx, \quad F(u, v) = \int_\omega u^- v\, dx,$$
$$u^-(x) = \min(u(x) - \psi(x), 0), \quad u^+(x) = u(x) - u^-(x) \quad x \in \omega.$$

Отметим, что [12] $u^-(x) \in E$, $\quad u^-(x)(u^+(x) - \psi) \equiv 0$, т.к. $u^-(x) = 0$ для $\{x \in \omega : u(x) \geqslant \psi(x)\}$ и $u^+(x) - \psi(x) = 0$ для $\{x \in \omega : u(x) \leqslant \psi(x)\}$, т.е. $u^+(x) - \psi(x) = u(x) - u^-(x) - \psi(x) = u(x) - (u(x) - \psi(x) - \psi(x)) = 0$. Из теоремы Рисса следует, что формы $A(u, v)$, $F(u, v)$ порождают в E операторы A

и F по формулам $(Au, v) = A(u, v)$ и $(Fu, v) = F(u, v)$. Легко проверить, что эти операторы непрерывны и монотонны, причем $(Au - Av, u - v) = \|u - v\|^2$.

Если исходная краевая задача разрешима в указанном выше классе функций, то из формулы Стокса получим, что решение u_0 этой задачи является одновременно решением ВН (4.6) с множеством K, определяемым по формуле:

$$K = \{u \in E : Fu = 0\} = \{u \in E : u \geqslant \psi \text{ на } \omega\}$$

Предложение 4.1 ([26]). *Пусть*

1) *решение ВН* (4.6) *принадлежит* $H^2(\omega)$;

2) $p(u) = \|u\|_{0,\,2,\,\omega}$, $\tau = 0$, $\mu = m = 1$, $C = \|\triangle u_0 + f\|_{0,\,2,\,\omega}$.

Тогда 1) *выполняются условия следствия* (4.4);

2) *оценки* (4.9, 4.10) *имеют вид:*

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^-\|_{0,\,2,\,\omega} \leqslant C\,\varepsilon, \quad |u_\varepsilon - u_0|_{1,\,2,\,\omega} \leqslant C\,\sqrt{\varepsilon};$$

3) u_0 – *решение задачи* (4.14).

Доказательство. Операторы A и F удовлетворяют условиям следствия 4.4 по построению. Условие $(Fu, u^+ - v) \geqslant 0, \;\; \forall v \in K$ проверяется следующим образом:

$$(Fu, u^+ - v) = (Fu, u^+ - \psi + \psi - v) = \int_\omega u^-(u^+ - \psi)\,d\,x +$$
$$+ \int_\omega u^-(\psi - v)dx = \int_\omega u^-(\psi - v)dx \geqslant 0,$$
$$\text{т.к. } \; u^-(u^+ - \psi) \equiv 0, \;\; \text{а } \; u^-, \psi - v \leqslant 0 \;\; \text{на } \; \omega.$$

Кроме этого

$$(Fu, u^-) = \int_\omega (u^-)^2 d\,x = p^2(u^-),$$
$$|(Au_0, u)| = |\int_\omega (\nabla u_0\,\nabla u - f\,u)dx| = |\int_\omega (\triangle u_0 + f)u\,d\,x| \leqslant$$
$$\leqslant \|\triangle u_0 + f\|_{0,\,2,\,\omega}\|u\|_{0,\,2,\,\omega} = C\,p(u).$$

Таким образом заключения 1, 2 предложения 4.1 вытекает из следствия 4.4.

Для того, чтобы доказать последнее заключение предложения 4.1 заметим, что для произвольной неотрицательной на ω функции v функция $u = v + \psi$ принадлежит множеству K, поэтому $(Au_0, u - u_0) \geqslant 0$. Возьмем в последнем неравенстве сначала $v = 0$, а затем $v = 2(u_0 - \psi)$. Получим сначала $(Au_0, \psi - u_0) \geqslant 0$ и затем $(Au_0, u_0 - \psi) \geqslant 0$, т.е. $(Au_0, u_0 - \psi) = 0$. Из последнего равенства получим $(Au_0, v) \geqslant 0$ при всех $v \geqslant 0$ на ω, $v \in E$. Из формулы Стокса теперь получим $-\triangle u \geqslant f$ и $0 = (Au_0, u_0 - \psi) = \int_\omega (\triangle u + f)(u_0 - \psi)\,d\,x$, а т.к. $\triangle u + f \leqslant 0$ и $u_0 - \psi \geqslant 0$, то $(\triangle u + f)(u_0 - \psi) = 0$. Что и требовалось доказать.

Пример 4.3. *Пусть* $E = H^1(\omega)$ *– гильбертово пространство со скалярным произведением:* $(u,v) = \int_\omega (\nabla u\,\nabla v + u\,v)\,d\,x$ *и нормой* $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. *Рассмотрим в* ω *задачу с препятствием на границе: найти* $u = u_0 \in H^2(\omega)$ *такой, что*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \omega: \quad -\bigtriangleup u + u = f,\\
&\forall x \in \partial\omega: u - \psi \geqslant 0,\ \partial u/\partial n \geqslant 0,\ (u-\psi)\partial u/\partial n = 0, \\
&\textit{где}\ \ f \in L_2(\omega),\ \psi \in H^1(\omega).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Результаты о существовании решения задачи 4.15 и ее физической интерпретации можно найти в работах [9, 10]. Мы здесь получим оценки скорости сходимости изучаемой аппроксимации. Отметим, что ВН (4.6) имеет решение без предположения включения $u_0 \in H^2(\omega)$.

Введем формы Дирихле $A(u,v)$ и $F(u,v) : E \times E \to \mathbb{R}$ формулами

$$\begin{aligned}
&A(u,v) = (u,v) - \int_\omega f v\,d\,x, \quad F(u,v) = \int_{\partial\omega} u^- v\,d\,\sigma,\\
&u^-(x) = \min(u(x) - \psi(x), 0), \quad u^+(x) = u(x) - u^-(x) \ \ x \in \omega.
\end{aligned}$$

Отметим, что [12] $u^-(x) \in E$. Из теоремы Рисса следует, что формы $A(u,v)$, $F(u,v)$ порождают в E операторы A и F по формулам $(Au,v) = A(u,v)$ и $(Fu,v) = F(u,v)$. Легко проверить, что эти операторы непрерывны и монотонны, причем $(Au - Av, u - v) = \|u - v\|^2$.

Если исходная краевая задача разрешима в указанном выше классе функций, то из формулы Стокса получим, что решение u_0 этой задачи является одновременно решением ВН (4.6) с множеством K, определяемым по формуле:

$$K = \{u \in E : Fu = 0\} = \{u \in E : u \geqslant \psi \text{ на } \partial\omega\}.$$

Повторяя доказательство предложения 4.1, можно доказать

Предложение 4.2 ([26]). *Пусть*

1) *решение ВН* (4.6) *принадлежит* $H^2(\omega)$;

2) $p(u) = \|u\|_{0,2,\partial\omega}$, $\tau = 0$, $\mu = m = 1$, $C = \|\nabla u_0\|_{0,2,\partial\omega}$.

Тогда 1) *выполняются условия следствия* (4.4);

2) *оценки* (4.9, 4.10) *имеют вид:*

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^-\|_{0,2,\partial\omega} \leqslant C\,\varepsilon, \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{1,2,\omega} \leqslant C\sqrt{\varepsilon};$$

3) u_0 *– решение задачи* (4.15).

Пример 4.4. *Пусть* $\partial\omega = \Gamma_a \cup \Gamma_u$, *где* Γ_a *и* Γ_u *замкнутые непересекающиеся подмножества, причем* Γ_u *имеет положительную* $(n-1)$*–мерную поверхностную меру.*

Обозначим $E = \{u \in H^1(\omega) : u = 0,\ x \in \Gamma_u\}$ *– гильбертово пространство со скалярным произведением:* $(u,v) = \int_\omega (\nabla u\,\nabla v)\,d\,x$ *и нормой* $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.

Рассмотрим в ω задачу с препятствием на границе: найти $u = u_0 \in H^2(\omega)$ такой, что

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \omega: \quad -\triangle\, u = f,\\
&\forall x \in \Gamma_u: \quad u = 0,\\
&\forall x \in \Gamma_a: \partial u/\partial n \geqslant 0,\ (u-\psi)\partial u/\partial n = 0,\ \psi \leqslant 0, \quad u-\psi \geqslant 0,\\
&\text{где}\ \ f \in L_2(\omega),\ \psi \in E.
\end{aligned}
$$

Эта задача является естественным обобщением задачи 4.15. Если в условиях последней всюду заменить $\partial\omega$ на Γ_a, то справедливы все высказывания предложения 4.2.

Глава 5

Обобщенная краевая задача

5.1 Аппроксимационная схема для обобщенной краевой задачи

В этом разделе мы предполагаем, что

E – сепарабельное рефлексивное банахово пространство;

$p(\cdot)$, $r(\cdot)$, – непрерывные полунормы в E;

$N = \{u \in E: \ p(u) = 0\}$ – замкнутое подпространство в E;

пара (E, p) обладает (П) свойством [26], т.е.

$$\forall u \in E \ \ \exists v \in N : \|u + v\| \leqslant C\, p(u), \tag{5.1}$$

где $C > 0$ – постоянная (см. замечание 2.1);

$A : E \to E^*$ – радиально непрерывный и сильно монотонный оператор, т.е.

$$(Au - Av, u - v) \geqslant m(u, v), \tag{5.2}$$

где свойства функции m даны в определении 3.2;

$F : E \to E^*$ – радиально непрерывный монотонный оператор, удовлетворяющий условиям:

$$\forall u,\, v \in E, \ u - v \notin N : \ (Fu - Fv, u - v) > 0, \tag{5.3}$$

$$\forall u,\, v \in E, \ x,\, y \in N : \ (F(u + x), v + y) = (Fu, v), \tag{5.4}$$

$$K = \{u \in E: \ Fu = 0\} \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. *Для* $\forall \psi \in K$ *справедливо равенство:*

$$K = \psi + N. \tag{5.6}$$

Доказательство. Из условия (5.4) получим

$$F(\psi) = F(\psi + x) = 0 \ \ \forall x \in N,$$

т.е. $\psi + N \subset K$. Докажем обратное включение. Пусть u – произвольный элемент множества K, тогда, т.к. $F\psi = Fu = 0$, то $(F\psi - Fu, \psi - v) = 0$ из (5.3) получим, что $u - \psi \in N$. Предложение 5.1 доказано.

Определение 5.1. *Обобщенной краевой задачей (ОКЗ) в E назовем задачу: найти $u = u_0 \in K$ такой, что при всех w из N справедливо равенство:*

$$(Au, w) = 0. \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. *Определение* 5.1 *хорошо согласуется с традиционными постановками краевых задач (см., например, постановку неоднородной задачи Дирихле в* [13]*).*

Предложение 5.2. *Обобщенная краевая задача однозначно разрешима в E.*

Доказательство. Задача (5.7) эквивалентна ВН:
найти $u = u_0 \in K$ такой, что при всех v из K выполняется неравенство:

$$(Au, v - u) \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть при всех v из K выполняется неравенство (5.8). Из предложения 5.1 следует, что $N = u - K$. Для произвольного элемента $w \in N$ векторы $v = u \pm w$ принадлежат K, поэтому одновременно выполняются два неравенства $(Au, w) \geqslant 0$ и $(Au, w) \leqslant 0$, т.е. $(Au, w) = 0$. Обратное очевидно, т.к. из равенства (5.7) и предложения 5.1 получим $(Au, v - u) = 0$, $\forall v \in K$, таким образом для произвольного $w \in N$ имеем $(Au, w) = 0$, и поэтому u является решением обобщенной краевой задачи (5.7). А, т.к. оператор A сильно монотонный, то из теоремы 4.1 и замечания 4.7 получим, что ВН (5.8) имеет единственное решение. Предложение доказано.

Предложение 5.3. *Уравнение*

$$Fu + \varepsilon Au = 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.9}$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ такое, что $(Au_\varepsilon, v) = 0$ $\forall v \in N$ и при $\varepsilon \to +0$ $\quad u_\varepsilon \to u_0$, причем u_0 – единственное решение обобщенной краевой задачи (5.7)*, и справедлива оценка*

$$(Fu_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant -\varepsilon(Au_0, u_\varepsilon - u_0). \tag{5.10}$$

Доказательство. Существование и единственность решения уравнения (5.9), сильная сходимость $u_\varepsilon \to u_0$ при $\varepsilon \to +0$ следует из следствия 4.2 и замечания 4.7. Эквивалентность ВН (5.8) и обобщенной краевой задачи (5.7) отмечена при доказательстве предложения 5.2.

Покажем, что $(Au_\varepsilon, y) = 0$ $\forall y \in N$. Действительно, для произвольного y из N получим из (5.4) при $v = 0$

$$\varepsilon(Au_\varepsilon, y) = -(Fu_\varepsilon, y) = -(Fu_\varepsilon, 0) = 0$$

Оценка (5.10) является частным случаем неравенства (4.8) следствия 4.3. Действительно, для произвольного элемента u из E положим $u^+ = u_0$, а $u^- = u - u_0$. Т.к. $u_0 \in K$, то из предложения 5.1 вытекает включение $u^+ - z \in N$ при всех z из K. Из условия (5.4) получим, что справедливо равенство $(Fu, y) = 0$ при всех $y \in N$, поэтому $(Fu, u^+ - z) = 0$. Таким образом условие 2 следствия 4.3 выполняются, что доказывает последнее утверждение предложения 5.3.

Замечание 5.2. *Уравнение* (5.9) *при сформулированных выше условиях на операторы A и F описывают абстрактную схему метода фиктивных областей (МФО). Таким образом МФО является частным случаем аппроксимации для обобщенной краевой задачи. Однако предложенная здесь схема МФО несколько отличается от классических схем МФО* ([6], [7], [16]). *Основное отличие состоит в том, что в этих схемах изучается не уравнение* (5.9), *а уравнение типа $(1-\varepsilon)Fu + \varepsilon Au = 0$. Последнее уравнение изучено в теоремах* 4.1, 4.2 *и в следствиях к ним с функцией $g(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < 1$. Впрочем после формально замены ε на $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ получим уравнение* (5.9). *Всюду ниже мы будем рассматривать это формально более простое уравнение* (5.9).

Предложение 5.4 ([26]). *Пусть $\alpha \geqslant 0$ и λ, γ – положительные константы такие, что при всех u из E и w из K выполняется оценка*

$$(Fu, u - w) \geqslant \alpha r^{\gamma+1}(u - w) + \lambda p^{\gamma+1}(u - w). \tag{5.11}$$

Тогда справедливы заключения предложения 5.3 *и оценки:*

$$\alpha^{1/(\gamma+1)} r(u_\varepsilon - u_0) \leqslant (\varepsilon C \|Au_0\|)^{1/\gamma} (1/\lambda)^{1/\gamma(\gamma+1)}, \tag{5.12}$$

$$p(u_\varepsilon - u_0) \leqslant (\varepsilon C \|Au_0\| / \lambda)^{1/\gamma}, \tag{5.13}$$

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant (\varepsilon/\lambda)^{1/\gamma} (C\|Au_0\|)^{(\gamma+1)/\gamma}, \tag{5.14}$$

здесь и ниже постоянная C взята из неравенства (5.1)

Доказательство. Т.к. элемент u_0 удовлетворяет равенству (5.7) при всех v из N, а пара (E, p) обладает условием (П), то $\forall u \in E$, $\exists v \in N$ такой что

$$|(Au_0, u)| = |(Au_0, u + v)| \leqslant \|Au_0\| \; \|u + v\| \leqslant C\|Au_0\| p(u). \tag{5.15}$$

Из оценок (5.10, 5.11, 5.15) имеем

$$\alpha r^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) + \lambda p^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant \varepsilon C \|Au_0\| p(u_\varepsilon - u_0),$$

из последнего неравенства вытекают неравенства (5.12 – 5.14).

Действительно

$$p^\gamma(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \frac{\varepsilon C}{\lambda} \|Au_0\|,$$

$$\alpha r^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon C\|Au_0\| \left(\frac{\varepsilon C}{\lambda}\,\|Au_0\|\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$m(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\|Au_0\| p(u_\varepsilon - u_0),$$

которые совпадают с (5.12 – 5.14).

Предложение 5.5 ([26]). *Пусть* 1) *справедливы оценки* (5.11)*;*

2) $\tau \in (0;1)$, α, λ, γ, C_1 *– положительные постоянные такие, что при всех* u *из* E *справедлива оценка*

$$|(Au_0, u)| \leqslant C_1 r^{1-\tau}(u) p^\tau(u). \tag{5.16}$$

Тогда справедливы заключения предложения 5.3 *и оценки:*

$$r(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon^{1/\gamma}(1/\alpha)^{(\gamma+1-\tau)/(\gamma+1)\gamma}(1/\lambda)^{\tau/\gamma(\gamma+1)}, \tag{5.17}$$

$$p(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon^{1/\gamma} C_1^{1/\gamma}(1/\alpha)^{(1-\tau)/(\gamma+1)\gamma}(1/\lambda)^{(\gamma+\tau)/\gamma(\gamma+1)}, \tag{5.18}$$

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant \varepsilon^{1/\gamma} C_1^{(\gamma+1)/\gamma}(1/\alpha)^{(1-\tau)/\gamma}(1/\lambda)^{\tau/\gamma}, \tag{5.19}$$

Доказательство. Из (5.10, 5.11, 5.16) так же, как и при доказательстве предложения 5.4 получим неравенство:

$$\alpha r^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) + \lambda p^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant \varepsilon C_1 r^{1-\tau}(u_\varepsilon - u_0) p^\tau(u_\varepsilon - u_0).$$

Из последнего неравенства имеем

$$r(u_\varepsilon - u_0) \leqslant (\varepsilon C_1 p^\tau(u_\varepsilon - u_0)/\alpha)^{1/(\gamma+\tau)}.$$

Подставляя это неравенство в предыдущее, получим последовательно оценки заключения предложения 5.5.

Предложение 5.6 ([26]). *Пусть* $\lambda = 0$ *и выполняются все остальные условия предложения* 5.5.

Тогда справедливы заключения предложения 5.3 *и оценки:*

$$r(u_\varepsilon - u_0) \leqslant (\varepsilon C_1 C_2^\tau/\alpha)^{1/(\gamma+\tau)}\|u_\varepsilon - u_0\|^{\tau/(\gamma+\tau)}, \tag{5.20}$$

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant (\varepsilon/\alpha)^{(1-\tau)/(\gamma+\tau)} C_1^{(1+\tau)/(\gamma+\tau)} C_2 \|u_\varepsilon - u_0\|^{\tau(\gamma+1)/(\gamma+\tau)}, \tag{5.21}$$

где $C_2 > 0$ *– константа из неравенства* $p(u) \leqslant C_2\|u\|$*. При некотором* C_2 *это неравенство выполняется, т.к.* $p(\cdot)$ *– непрерывная полунорма.*

Доказательство. как и при доказательстве предложения 5.4 получим неравенство:

$$\alpha r^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant \varepsilon C_1 C_2^\tau r^{1-\tau}(u_\varepsilon - u_0)\|u_\varepsilon - u_0\|^\tau.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\alpha r^{\gamma+1}(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon C_1 C_2^\tau r^{1-\tau}(u_\varepsilon - u_0)\ \|u_\varepsilon - u_0\|^\tau.$$

Т.е.

$$r(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\ C_1 C_2^\tau \|u_\varepsilon - u_0\|^\tau\right)^{\frac{1}{\gamma+\tau}},$$

что совпадает с (5.20),

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant C_1 r^{1-\tau}(u_\varepsilon - u_0) C_2^\tau \|u_\varepsilon - u_0\|^\tau \leqslant C_1 \left(\frac{\varepsilon C_1 C_2^\tau}{\alpha}\right)^{\frac{1-\tau}{\gamma+\tau}} \|u_\varepsilon - u_0\|^{\frac{\tau(1-\tau)}{\gamma+\tau}+\tau},$$

что дает 5.21.

Замечание 5.3. *Неравенство* (5.16) *при конкретных реализациях схем метода фиктивных областей требует обычно более сильных предположений, чем выполнение условия* (П)*. Оценки* (5.17 – 5.19) *получены здесь в общем операторном виде потому, что обычно они получаются при доказательстве скорости сходимости традиционно построенных схем МФО для конкретных задач.*

Замечание 5.4. *Иногда для увеличения скорости сходимости аппроксимации в операторе F следует брать коэффициент α зависящем от ε, например так:*

$$F = \alpha_0 \varepsilon^{-\delta} F_1 + \lambda F_2,\ \alpha_0 > 0,\ \delta > 0, \lambda > 0,$$

и

$$K = \{u \in E : Fu = 0\} = K_1 \cap K_2,\ K_i = \{u \in E : F_i u = 0\},\ i = 1, 2.$$

Тогда оценки (5.17 – 5.19) *имеют вид:*

$$r(u_\varepsilon - u_0) \sim \varepsilon^{[\gamma+1+\delta(\gamma+1-\tau)]/\gamma(\gamma+1)}, \tag{5.22}$$

$$p(u_\varepsilon - u_0) \sim \varepsilon^{[\gamma+1+\delta(1-\tau)]/\gamma(\gamma+1)}, \tag{5.23}$$

$$m(u_\varepsilon, u_0) \sim \varepsilon^{[1+\delta(1-\tau)]/\gamma}, \tag{5.24}$$

коэффициенты в (5.22 – 5.24) *равны соответствующим коэффициентам в* (5.17 – 5.19) *с заменой α на α_0.*

Приведенные оценки являются переписыванием соответствующих неравенств с заменой α на $\varepsilon^{-\delta}\alpha_0$.

Замечание 5.5. *Если оператор A удовлетворяет условию (типа условия Липшица):*

$$\|Au - Av\| \leqslant M(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|^\sigma, \tag{5.25}$$

где $\sigma > 0$ – постоянная, $M(t)$ – неубывающая функция неотрицательного аргумента. Тогда оценки (5.14, 5.19, 5.24) *можно усилить следующим образом:*

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant C C_3 \|u_\varepsilon - u_0\|^\sigma p(u_\varepsilon - u_0), \tag{5.26}$$

где $C_3 = \sup\{M(\|u_0\| + \|u_\varepsilon\|)$, $\varepsilon \in (0; 1]$.

Действительно, из предложения 5.3 имеем $(Au_\varepsilon, v) = (Au_0, v) = 0$ при всех v из N. Таким образом

$$(Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0) = (Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0 + v)\ \forall v \in E$$

Теперь из (5.9) и условия (П) получим

$$m(u_\varepsilon, u_0) \leqslant (Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\|Au_\varepsilon - Au_0\|^\sigma p(u_\varepsilon - u_0),$$

что вместе с (5.25) дает (5.26).

Рассмотрим более подробно простые, но важные для приложений случаи: пусть для всех $u, v \in E$ и некоторого w из K выполняются оценки

$$(Fu, u - w) \geqslant \mu p^2(u - w),\ \ \mu > 0, \tag{5.27}$$

$$(Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^2,\ \ m > 0. \tag{5.28}$$

Кроме этих могут быть наложены оценки типа:

$$\|Au\| \leqslant M\|u\| + L,\ \ L > 0, \tag{5.29}$$

$$\|Au - Av\| \leqslant M\|u - v\|,\ \ M > 0. \tag{5.30}$$

Докажем следующее утверждение:

Предложение 5.7 ([27]). *Пусть операторы A и F удовлетворяют оценкам* (5.27, 5.28). *Тогда справедливы заключения предложения* 5.3 *и оценки:*

1)

$$p(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon C\|Au_0\|/\mu, \tag{5.31}$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \sqrt{\varepsilon/m\mu}C\|Au_0\|; \tag{5.32}$$

2) *если выполняется оценка* (5.29) *и для некоторого $v \in E$, $Av = 0$, то*

$$\|Au_0\| \leqslant C^2M^2\|Fv\|/m\mu + 2M\|v\| + L; \tag{5.33}$$

3) *если выполняется оценка* (5.29) *и для некоторого $v \in E$, $Fv = 0$, то*

$$\|Au_0\| \leqslant M(\|Av\|/m + \|v\|) + L; \tag{5.34}$$

4) *если выполняется оценка* (5.29), *то*

$$\|Au_0\| \leqslant (1,5C^2M^2\|F0\| + \mu M\|A0\|)/m\mu + 1,5L; \tag{5.35}$$

5) *если выполняется оценка* (5.30), *то справедливо следующее уточнение оценки* (5.32)

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant \varepsilon M C^2 \|Au_0\|/m\mu; \tag{5.36}$$

6) *если выполняется оценка* (5.30) *и для некоторого* $v \in E$, $Av = 0$, *то*

$$\|Au_0\| \leqslant C^2 M^2 \|Fv\|/m\mu; \tag{5.37}$$

7) *если выполняется оценка* (5.30) *и для некоторого* $v \in E$, $Fv = 0$, *то*

$$\|Au_0\| \leqslant \|Av\|(1 + M/\mu); \tag{5.38}$$

Здесь во всех оценках C *– константа из неравенства* (5.1).

Доказательство. 1) неравенства (5.31, 5.32) вытекают непосредственно из (5.13, 5.14);

2) пусть выполняется оценка (5.29) и для некоторого v из E $Av = 0$, тогда из (П) свойства, (5.4, 5.27) получим

$$\mu p^2(u_0 - v) \leqslant (Fu_0 - Fv, u_0 - v) = -(Fv, u_0 - v) \leqslant C\|Fv\|p(u_0 - v),$$

таким образом $p(u_0 - v) \leqslant C\|Fv\|/\mu$.

Обозначим $t = \|u_0 - v\|$, тогда из (5.7, 5.28) и (П) свойства получим

$$mt^2 \leqslant (Au_0, u_0 - v) \leqslant C\|Au_0\|p(u_0 - v) \leqslant C^2\|Fv\|(Mt + M\|v\| + L)/\mu,$$

следовательно

$$t^2 - tC^2\|Fv\|M/\mu m - C^2\|Fv\|M(\|v\| + L/M)/m\mu \leqslant 0,$$

или, выделяя полный квадрат,

$$(t - C^2\|Fv\|M/2\mu m)^2 \leqslant C^4\|Fv\|^2M^2/4\mu^2m^2 + C^2\|Fv\|M(\|v\| + L/M)/\mu m,$$

а, т.к. справедливо неравенство $a^2 + 2ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, то из предыдущего неравенства при $a = C^2\|Fv\|M/2\mu m$ и $b = \|v\| + L/M$ получим $t - a \leqslant a + b$, т.е.

$$\|u_0 - v\| \leqslant C^2\|Fv\|M/m\mu + \|v\| + L/M.$$

Оценка (5.33) теперь следует из (5.29);

3) пусть выполняется оценка (5.29) и для некоторого v из E $Fv = 0$, тогда из (5.5, 5.6) получим, что $u_0 - v \in N$, т.е. из (5.7, 5.28) следует неравенство:

$$m\|u_0 - v\|^2 \leqslant (Au_0 - Av, u_0 - v) = -(Av, u_0 - v) \leqslant \|Av\|\|u_0 - v\|,$$

таким образом $\|u_0\| \leqslant \|Av\|/m + \|v\|$. Из последнего неравенства и (5.29) получим (5.34).

4) пусть выполняется оценка (5.29), тогда из свойства (П) и (5.4, 5.29)

$$\mu p(u_0)^2 \leqslant (Fu_0 - F0, u_0) = -(F0, u_0) \leqslant C\|F0\|p(u_0),$$

таким образом $p(u_0) \leqslant C\|F0\|/\mu$.

Аналогично, с использованием (5.7, 5.28, 5.29),

$$m\|u_0\|^2 \leqslant (Au_0 - A0, u_0) = (Au_0, u_0) - (A0, u_0) \leqslant \|Au_0\| p(u_0) +$$
$$+\|A0\|\|u_0\| \leqslant C^2(M\|u_0\| + L)\|F0\|/\mu + \|A0\|\|u_0\|,$$

Обозначим $t = \|u_0\|$, тогда из последнего неравенства получим

$$t^2 - (C^2M\|F0\| + \mu\|A0\|)t/m\mu - C^2L\|F0\|/m\mu \leqslant 0,$$

таким образом

$$\left(t - \frac{C^2M\|F0\| + \mu\|A0\|}{2m\mu}\right)^2 \leqslant \left(\frac{C^2M\|F0\| + \mu\|A0\|}{2m\mu}\right)^2 + \frac{C^2L\|F0\|}{m\mu}.$$

Т.к. для a, $b > 0$ справедливо неравенство $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, то

$$t \leqslant (C^2M\|F0\| + \mu\|A0\|)/m\mu + C\sqrt{L\|F0\|/m\mu},$$

а т.к. $2ab \leqslant a^2 + b^2$, то последнее слагаемое в предыдущем неравенстве можно переписать так:

$$2C\sqrt{L\|F0\|/m\mu} \leqslant C^2M\|F0\|/m\mu + L/M,$$

т.е.

$$\|u_0\| \leqslant (1,5C^2M\|F0\| + \mu\|A0\|)/m\mu + L/2M.$$

Оценка (5.35) является следствием последнего неравенства и (5.29);

5) если выполняется оценка (5.30), то из оценки (5.26), замечания 5.5 и неравенства (5.31) вытекает справедливость (5.36).

6) пусть выполняется неравенство (5.30) и для некоторого v из E $Av = 0$. Тогда, как и на втором шаге доказательства предложения 5.7, получим $p(u_0 - v) \leqslant C\|Fv\|/\mu$, и

$$m\|u_0 - v\|^2 \leqslant -(Au_0, v) \leqslant C\|Au_0\|\, p(u_0 - v) \leqslant$$
$$\leqslant C\|Au_0 - Av\|\, p(u_0 - v) \leqslant C^2M\|u_0 - v\|\, \|Fv\|/\mu,$$

т.е. $\|u_0 - v\| \leqslant C^2M\|u_0 - v\|\, \|Fv\|/m\mu$. Из последнего неравенства и (5.30) получим

$$\|Au_0\| = \|Au_0 - Av\| \leqslant M\|u_0 - v\| \leqslant C^2M^2\|u_0 - v\|\, \|Fv\|/m\mu,$$

что совпадает с (5.37).

7) пусть выполняется оценка (5.30) и для некоторого v из E $Fv = 0$. Тогда, как и на третьем шаге доказательства предложения 5.7, получим $\|u_0 - v\| \leqslant \|Av\|/m$, и

$$\|Au_0\| = \|Au_0 - Av\| \leqslant M\|u_0 - v\| + \|Av\| \leqslant M\|u_0 - v\| + \|Av\| \leqslant$$
$$\leqslant \|Av\|(1 + M/m).$$

предложение 5.7 доказано полностью.

5.2 Схемы метода фиктивных областей для конкретных эллиптических краевых задач Дирихле как конкретная реализация аппроксимационных схем для обобщенной краевой задачи

В этом разделе мы построим несколько конкретных схем МФО для простейших краевых задач Дирихле иллюстрирующие возможные применения аппроксимационных схем для обобщенной краевой задачи.

Здесь мы будем предполагать, что ω и ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ с границей класса $C^{0,1}$ (под термином область здесь и далее понимается односвязная область), причем $\overline{\omega} \subset \omega_1$, ω_1 – область , $\omega_1 \backslash \overline{\omega}$ – открытое множество, компоненты связности которого являются областями с регулярной границей и замыкания этих компонент не пересекаются.

В качестве E мы будем брать пространство С.Л. Соболева: $W_0^{1,s}(\omega_1)$ при $s > 1$ с нормой $\|u\| = \left(\int_{\omega_1} (\nabla u, \nabla u)^{s/2} d\,x\right)^{1/s}$, и полунормами $r(u) = \|u\|_{0,s,\omega_1\backslash\overline{\omega}}$, $p(u) = \left(kr^s(u) + \int_{\omega_1\backslash\overline{\omega}} (\nabla u, \nabla u)^{s/2} d\,x\right)^{1/s}$, где $k = 0$, если множество $\omega_1\backslash\overline{\omega}$ является областью и $k = 1$ в противном случае. При таком определении пара E, p обладает по лемме 1.4 П свойством.

Если $u \in E$, то из леммы 1.6 получаем следующие мультипликативные оценки (1.12)

$$\|u\|_{0,s,\partial\omega} \leqslant C(\omega_1, \omega) r^{(s-1)/s}(u)\, p^{1/s}(u).$$

Задача 5.1. *Рассмотрим в ω однородную задачу Дирихле: найти $u = u_0 \in W_0^{1,s}(\omega_1)$ удовлетворяющий уравнению:*

$$-\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\nabla u, \nabla u)^{(s-2)/2} u_{x_i}\right) = f, \tag{5.39}$$

где $f \in L_{s'}(\omega)$, $(1/s) + (1/s') = 1$. под решением задачи (5.39) мы всюду ниже понимаем обобщенное решение, т.е. $u = u_0$ является решением, если он удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\omega} (\nabla u, \nabla u)^{(s-2)/2} (\nabla u, \nabla v) d\,x = \int\limits_{\omega} f\, v d\,x, \quad \forall v \in W_0^{1,s}(\omega).$$

Построим как и в примерах 4.2 – 4.4 операторы A и F. Для этого введем формы Дирихле $A(u,v)$, $F(u,v) : E \to \mathbb{R}$ и затем соотношениями $A(u,v) = (Au, v)$, $F(u,v) = (Fu, v)$ определим операторы A и $F : E \to E^*$. Пусть $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \neq 0$

$$(Au, v) = \int\limits_{\omega_1} (\nabla u, \nabla u)^{(s-2)/2} (\nabla u, \nabla v) d\,x - \int\limits_{\omega} f\, v d\,x,$$

$$(Fu,v) = a\int\limits_{\omega_1\backslash\omega} (\nabla u,\nabla u)^{(s-2)/2}(\nabla u,\nabla v)d\,x + b\int\limits_{\omega_1\backslash\omega} |u|^{s-2}u\,vd\,x,$$

Построенные операторы A и F являются непрерывными монотонными операторами и удовлетворяют оценкам (см. [21] с. 312 и с. 317):

$$\exists m > 0, \forall u, v \in E : (Au - Av, u - v) \geqslant m\|u - v\|^s, s \geqslant 2, \tag{5.40}$$

$$\exists M > 0, \forall u, v \in E : \|Au - Av\| \leqslant M\,(\|u\| + \|v\|)^s\|u - v\|, s \geqslant 2, \tag{5.41}$$

$$\forall u \in E : (Fu, u) \geqslant \alpha r^s(u) + \beta p^s(u), s > 1, \tag{5.42}$$

$$\begin{gathered}\exists m > 0, \forall u, v \in E, \forall s \in (1;2] : \\ (Au - Av, u - v) \geqslant m(\|u\| + \|v\|)^{s-2}\|u - v\|^2,\end{gathered} \tag{5.43}$$

$$\exists M > 0, \forall u, v \in E, \forall s \in (1;2] : \|Au - Av\| \leqslant M\,\|u - v\|^{s-1}. \tag{5.44}$$

Если множество $\omega_1\backslash\overline{\omega}$ является областью, то $\alpha = b,\ \beta = a$.

Если множество $\omega_1\backslash\overline{\omega}$ не является областью, $\alpha = b,\ \beta = 0$ при $a = 0$, и $\alpha = \beta = \min(a, b)/2$ при $a > 0,\ b > 0$.

Из оценок (5.40 – 5.44), предложений 5.4, 5.6 и замечаний 5.4, 5.5 вытекает утверждение.

Предложение 5.8 ([26]). *Уравнение $Fu + \varepsilon Au = 0$ при $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ и при $\varepsilon \to +0$ $\quad u_\varepsilon \to u_0$, где $u_0|_\omega$ – обобщенное решение задачи* (5.1) *и $u_0|_{\omega_1\backslash\overline{\omega}} = 0$, при этом выполняется следующая оценка скорости сходимости: $\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant C\varepsilon^\gamma$, где*

1) $\gamma = 1/(s-1)^2$, если $a > 0,\ b > 0,\ s \geqslant 2$;
2) $\gamma = 1/(s-1)(3-s)$, если $a > 0,\ b > 0,\ s \in (1;2]$;
3) $\gamma = (s^2 + \delta(s-1))/s^2(s-1)^2$, если $a > 0,\ \ b_0 > 0,\ \delta > 0,\ \ b = b_0\varepsilon^{-\delta}$, $u_0 \in W^{2,s}(\omega),\ \ s \geqslant 2$;
4) $\gamma = (s^2 + \delta(s-1))/s^2(s-1)(3-s)$, если $a > 0,\ \ b_0 > 0,\ \delta > 0,\ \ b = b_0\varepsilon^{-\delta}$, $u_0 \in W^{2,s}(\omega),\ \ s \in (1;2]$;
5) $\gamma = 1/s^2$, если $a = 0,\ \ b > 0,\ \ u_0 \in W^{2,s}(\omega),\ \ s \geqslant 2$;
6) $\gamma = (s-1)/(2s^2 - 3s + 2)$, если $a = 0,\ \ b > 0,\ u_0 \in W^{2,s}(\omega),\ \ s \in (1;2]$;
7) $\gamma = 1/(s-1)^2$, если $a > 0,\ \ b = 0,\ \omega_1\backslash\overline{\omega}$ – область, $\ s \geqslant 2$;
8) $\gamma = 1/(s-1)(3-s)$, если $a > 0,\ \ b = 0,\ \omega_1\backslash\overline{\omega}$ – область, $\ s \in (1;2]$.

Замечание 5.6. *В предложении* 5.8 *описаны четыре схемы МФО для* $s \in (1;2]$ *и* $s \geqslant 2$. *Две первые и две последние схемы не требуют включения элемента* u_0 *в пространство* $W^{2,s}(\omega)$, *т.к. доказательство этих оценок основывается не на мультипликативных оценках, а на* (П) *свойстве пары* (E, p) *(см. предложение* 5.4*).*

Далее в этом параграфе мы будем считать, что $s=2$ и ω_1 – параллелепипед с ребрами параллельными осям координат:

$$\omega_1=\{x\in\mathbb{R}^n:\ a_i<x_i<a_i+l_i,\ a_i,l_i\in\mathbb{R},\ l_i>0\ i=1,\dots,n\}.$$

Задача 5.2 ([26]). *Рассмотрим в ω неоднородную задачу Дирихле:*

$$-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j})+a_0(x)u=f,\quad u|_{\partial\omega}=\psi, \tag{5.45}$$

где $a_{ij}=a_{ji}\in L_\infty(\omega),\quad a_0\in L_\infty(\omega),\quad f\in L_2(\omega)\quad \psi\in H^1(\omega)$.

(*Условия гладкости коэффициентов задачи можно ослабить, см.* [13].)

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}t_it_j\geqslant\mu_0\sum_{1\leqslant i\leqslant n}t_i^2,\quad \mu_0>0, \tag{5.46}$$

$$\min(a_0(x),0)\geqslant-\theta\,\mu_0/L^2,\quad \theta\in[0;1) \tag{5.47}$$

(*определение константы L см. в формуле* (1.7)).

При этих условиях уравнение (5.45) имеет единственное обобщенное решение $u=u_0\in H_0^1(\omega)$.

Предложение 5.9 ([26], [25]). *Пусть* 1) *множество $\omega_1\backslash\overline{\omega}$ является областью;*

2) *a_{ij},a_0 имеют ограниченные продолжения в ω_1 с сохранением оценок* (5.46), (5.47), *$f\in L_2(\omega_1)$ и $\psi\in H_0^1(\omega_1)$.*

Тогда вспомогательная задача: найти $u=u_\varepsilon\in H_0^1(\omega_1)$ такое, что при всех v из $H_0^1(\omega_1)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\omega_1\backslash\overline{\omega}}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}(x)(u-\psi)_{x_j}v_{x_j}+a_0(x)(u-\psi)\,v\right)d\,x+\\ &+\varepsilon\int\limits_{\omega_1}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}(x)u_{x_j}v_{x_j}+a_0(x)u\,v-f\,v\right)d\,x,\quad \varepsilon>0\end{aligned} \tag{5.48}$$

имеет единственное решение $u=u_\varepsilon$ и при $\varepsilon\to+0$ u_ε сильно в $H_0^1(\omega_1)$ сходится к u_0, где $u_0|_\omega$ – обобщенное решение задачи (5.45), *$u_0|_{\omega_1\backslash\omega}=\psi$, причем выполняется оценка*

$$|u_\varepsilon-u_0|_{1,2,\omega_1}\leqslant C_0\varepsilon, \tag{5.49}$$

где

$$\begin{aligned}C_0&=(n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\omega_1}+\|a_0\|_{0,\infty,\omega_1}L)C^2(\omega,\omega_1)\cdot\\ &\cdot(n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\omega_1}\|\psi\|_{1,2,\omega_1}+\|a_0\|_{0,\infty,\omega_1}\|\psi\|_{0,2,\omega_1}L\,+\,\|f\|_{0,2,\omega_1}L)\cdot\\ &\cdot((1-\theta)\mu_0+n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\omega_1}+\|a_0\|_{0,\infty,\omega_1}L)/(1-\theta)^3\mu_0^3,\end{aligned}$$

$C(\omega,\omega_1)$ – константа из условия (П), *а L – константа из неравенства* (1.7).

Доказательство. Пространство E, норма этого пространства и полунорма $p(\cdot)$ введены в начале этого раздела. При $s=2$ E является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(u,v)=\int\limits_{\omega_1}(\nabla u,\nabla v)d\,x.$$

Как и в предложении 5.8 введем формы Дирихле $A(u,v)$ и $F(u,v)$ формулами:

$$A(u,v)=\int\limits_{\omega_1}(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_i}+a_0uv-fv)\,d\,x$$

и

$$F(u,v)=\int\limits_{\omega_1\setminus\omega}(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}(u-\psi)_{x_i}v_{x_i}+a_0(u-\psi)v)\,d\,x$$

Операторы A и $F:E\to E$ определим соотношениями $(Au,v)=A(u,v)$, $(Fu,v)=F(u,v)$. Так построенные операторы A и F непрерывны и удовлетворяют оценкам (5.27,5.28, 5.30) с

$$m=\mu=(1-\theta)\mu_0,\ C=C(\omega,\omega_1),\ M=n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\omega_1}+\|a_0\|_{0,\infty,\omega_1}L.$$

При этом

$$K=\{u\in E:u|_{\omega_1\setminus\omega}=\psi\},\ F\psi=0$$

и

$$\|A\psi\|\leqslant n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\omega_1}\|\psi\|_{1,2,\omega_1}+\|a_0\|_{0,\infty,\omega_1}\|\psi\|_{0,2,\omega_1}L\ +\ \|f\|_{0,2,\omega_1}L.$$

Справедливость заключений предложения 5.9 вытекает теперь из предложения 5.7.

Замечание 5.7. *Ниже мы больше не будем выписывать подробно вид коэффициентов в оценке скорости сходимости типа* (5.49). *Это делается достаточно просто, если воспользоваться предложением* (5.7).

Предложение 5.10 ([26]). *Пусть выполняются условия предложения* (5.9). *Тогда вспомогательная задача: найти $u=u_\varepsilon\in H_0^1(\omega_1)$ такое, что при всех v из $H_0^1(\omega_1)$ и $\varepsilon>0$ справедливо равенство:*

$$\int\limits_{\omega_1\setminus\omega}(a\nabla(u-\psi)\nabla v+b(u-\psi)v)d\,x+$$
$$+\varepsilon\int\limits_{\omega_1}(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_i}+a_0uv-fv)\,d\,x=0,$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon \to +0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0, *где* $u_0|_{\omega_1\setminus\omega} = \psi$ *и* $u_0|_{\omega_1}$ – *обобщенное решение задачи* (5.45), *причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$|u_\varepsilon - u_0|_{1,2,\omega_1} \leqslant C\varepsilon^\beta, \tag{5.50}$$

где константа C *зависит от параметров исходной краевой задачи, а* β *определяется соотношениями:*

1) $\beta = 1$, *если* $a > 0, b > 0$;
2) $\beta = 1/4$, *если* $a = 0, b > 0$, $u_0 \in H^2(\omega)$;
3) $\beta = 1$, *если* $a > 0, b = 0$, $\omega_1\setminus\omega$ – *область;*
4) $\beta = 1 + \delta/2$, *если* $a > 0, b = b_0\varepsilon^{-\delta}, b_0 > 0$, $u_0 \in H^2(\omega)$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $E = H_0^1(\omega_1)$ введем оператор A так же как в предложении 5.9, а оператор F построим при помощи формы Дирихле

$$F(u,v) = \int\limits_{\omega_1\setminus\omega} (a\nabla(u-\psi)\nabla v + b(u-\psi)v)\,dx.$$

Далее доказательство этого предложения завершается проверкой выполнения условий предложений 5.4 – 5.7 и замечаний 5.4 и 5.5.

Замечание 5.8. *Если* $a_{ij} \in C^1(\overline{\omega}_1)$, $a_0 \in C^1(\overline{\omega}_1)$, $f \in L_2(\omega_1)$, $\omega \in C^2$, *то в схеме МФО предложения* 5.10 *с* $a = 0$ *справедливы включения* $u_0 \in H^2(\omega)$, $u_\varepsilon \in H^2(\omega_1)$. *Для других схем, приведенных выше в предложениях* 5.9 – 5.10, *можно лишь утверждать, что* $u_\varepsilon \in H^{3/2}(\omega_1)$.

Замечание 5.9. *Построение схем МФО для квазилинейных краевых задач с нелинейной правой частью проводится аналогично. Скорость сходимости таких схем находится с использованием предложений* 5.4 – 5.7 *и замечаний* 5.4 *и* 5.5.

Замечание 5.10. *При построении схем МФО задачи Дирихле необходимо следить за выполнением условия:* $K|_\omega = \psi + H_0^1(\omega)$. *Так, если предложениях* 5.8, 5.10 *при* $b = 0$ *и в предложении* 5.9 *не требовать, чтобы множество* $\omega_1\setminus\overline{\omega}$ *было областью, то указанное равенство нарушается. Используя лемму* 2.8, *можно проверить, что все заключения предложений* 5.8 – 5.10 *будут при этом справедливы, за исключением равенства:* $u_0|_{\partial\omega} = \psi$.

5.3 Схемы метода фиктивных областей для конкретных эллиптических краевых задач Неймана как конкретные реализации аппроксимационных схем для обобщенной краевой задачи

В этом разделе в качестве иллюстрации результатов о сходимости аппроксимационных схем для обобщенной краевой задачи мы приведем несколько схем МФО простейших задач Неймана.

Здесь мы через ω_1 обозначим прямоугольник

$$\omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < a_i + l_i, a_i \in \mathbb{R}, l_i \in \mathbb{R}, l_i > 0, i = 1, \ldots, n\},$$

ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей, $\overline{\omega} \subset \omega_1$.
$E = H_0^1(\omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v) = \int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v \, d\, x$, с нормой $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ и полунормами $r(u) = \|u\|_{0,2\,\omega}$, $p(u) = (\int\limits_{\omega} (\nabla u \nabla u + k u^2) \, d\, x)^{1/2}$, где $k = 0$ или $k = 1$. При таком определении пара (E, p) обладает П свойством (см. леммы 2.4, 2.5).

Задача 5.3. *Рассмотрим в ω уравнение* (5.45) *с одним из краевых условий:*

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} u_{x_i} \nu_j = 0, \quad x \in \partial\omega, \tag{5.51}$$

здесь и ниже $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор по направлению к внешней нормали $\partial\omega$;

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \psi, \quad x \in \partial\omega, \;\; \psi \in H^1(\omega); \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \psi - \gamma u, \quad x \in \partial\omega, \;\; \psi \in H^1(\omega), \;\; \gamma > 0. \tag{5.53}$$

В этой задаче мы предполагаем, что $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$ при $x \in \omega$, а остальные параметры задачи такие же, как в уравнении (5.45).

В рассматриваемых условиях задача (5.51) имеет единственное решение. Принципиально построение схем МФО для уравнения (5.45) с любым из краевых условий (5.51 – 5.53) мало отличаются одно от другого и проще схем МФО для задачи Дирихле, поэтому рассмотрим построение такой схемы для задачи (5.45) с условием (5.53).

Предложение 5.11 ([26]). *Вспомогательная задача: найти $u = u_\varepsilon \in E$ такой, что при всех v из E справедливо тождество:*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\omega} (\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 uv - fv)\, d\,x + \\
&+\int\limits_{\partial\omega} (\gamma u - \psi)\, d\,x + \varepsilon \int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v d\,x = 0,\ \varepsilon > 0
\end{aligned} \tag{5.54}
$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon \to +0$ u_ε *сильно в* E *сходится к* u_0, *где* $u_0|_\omega$ *– обобщенное решение задачи* (5.45, 5.53), *при этом справедлива оценка* (5.49) *скорости сходимости с*

$$
C_0 = C^3(\omega, \omega_1) \left(\|f\|_{0,\,2,\,\omega_1} L + C^2(\omega)(1+L)\|\psi\|_{1,\,2,\,\omega} \right) / \mu,
$$

где $\mu = \min(\mu_0, \alpha_0)$, $C(\omega, \omega_1)$ *– константа, возникающая в условии* Π, $C(\omega)$ *– постоянная из неравенства* $\|\psi\|_{0,\,2,\,\partial\omega} \leqslant C(\omega)\|\psi\|_{1,\,2,\,\omega}$, *а* L *– определено* (1.7).

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 5.10, при этом $p(\cdot)$ выбирается с $k = 1$.

Замечание 5.11. *Схема МФО краевой задачи Неймана для квазилинейного уравнения с нелинейной главной частью строится и обосновывается аналогично схеме* (5.54).

Замечание 5.12. *Оператор* A *в с схеме* (5.54) *задается слагаемым с коэффициентом* ε. *Предельная функция* u_0 *является решением ВН* (5.8), *которое в настоящих условиях может быть переформулировано в виде:* u_0 *– продолжение обобщенного решения исходной задачи с минимальной нормой в* E. *Если в в* E *взять другое скалярное произведение:* $(u, v) = \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + uv)\, d\,x$ *и норму* $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, *а в* (5.54) *последнее слагаемое заменить на следующее* $\varepsilon \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + uv)\, d\,x$, *то* u_0 *будет продолжением обобщенного решения исходной задачи с минимальным свойством уже по другой вновь определенной норме. Т.о. изменяя это последнее слагаемое в* (5.54) *можно получать различные продолжения элемента* u_0. *Аналогичный эффект продолжения будет ниже использован при изучении одной задачи типа задачи дифракции.*

Задача 5.4. *Рассмотрим в* ω *уравнение* (5.45) *с* $a_0(x) = 0$ *и функцией* $f(x)$, *удовлетворяющей условию* $\int\limits_{\omega} f(x)\, d\,x = 0$ *с краевым условием* (5.51). *Остальные параметры задачи такие же, как и для уравнения* (5.45).

Такая задача [17] имеет неединственное обобщенное решение.

Предложение 5.12 ([26]). *Для задачи 5.4 справедливы заключения предложения* 5.11 *с* $a_0 = \psi = \gamma = 0$, $\mu = \mu_0$.

Доказательство этого предложения вытекают из предложения 5.7, леммы 2.6 и проводятся по схеме доказательства предложения 5.10, при этом $p(\cdot)$ следует выбирать с $k = 0$.

5.4 Приложение схем метода фиктивных областей к одной задаче типа задачи дифракции

Здесь мы применим аналоги схем МФО к некоторым вариантам задачи дифракции (постановку и детальное исследование этой задачи можно найти в книге [13]). Здесь мы покажем, что отдельные варианты задачи дифракции являются частным случаем обобщенной краевой задачи.

Сделаем сначала несколько абстрактных построений.

Пусть E – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и непрерывными полунормами $p_i(\cdot)$, где $i = 0, \dots, \alpha, \dots, \beta$; $\alpha < \beta$ – натуральные числа, $p_0(\cdot) = p(\cdot)$, причем

$$p^2(\cdot) = \sum_{1\leqslant i\leqslant\alpha} p_i^2(\cdot),$$

норма

$$|\cdot| = (\sum_{1\leqslant i\leqslant\beta} p_i^2(\cdot))^{1/2}$$

эквивалентна норме $\|\cdot\|$, замкнутые подпространства

$$N_i = \{u \in E : p_i(u) = 0, \quad N = N_0 = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant\alpha} N_i = \{u \in E : p(u) = 0\},$$

пара (E, p) обладает условием (П).

Операторы $F_i :\ E \to E^*$ радиально непрерывны и удовлетворяют $\forall u, v \in E$ и $\forall x, y \in N$ условиям:

$$(F_0 u, x) = 0, \quad (F_i(u + x), v + y) = (F_i u, v), \quad i = 1, \dots, \alpha, \tag{5.55}$$

$$(F_i u - F_i v, u - v) \geq \mu_i\, p_i^2\,(u - v), \quad \mu_i > 0,\ i = 0, 1, \dots, \beta, \tag{5.56}$$

$$K_i = \{u \in E :\ F_i u = 0\},\ i = 1, \dots, \alpha,\ K = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant\alpha} K_i \neq \emptyset. \tag{5.57}$$

Лемма 5.1. *Пусть* $F = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant\alpha} F_i$ *и выполняются все сделанные выше предположения. Тогда справедливо равенство:*

$$K = \{u \in E : Fu = 0\}. \tag{5.58}$$

Доказательство.

1) пусть $u_0 \in K$, тогда $F_i u_0 = 0$ при всех $i = 1, \ldots, \alpha$, т.е. $Fu_0 = 0$;

2) Пусть u – произвольное решение уравнения $Fu = 0$. Т.к. по предположению (5.57) множество K непусто, то найдется $u_0 \in K$ и, следовательно,

$$0 = (Fu_0 - Fu, u_0 - u) \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} \mu_i \, p_i^2(u_0 - u).$$

Т.о. $p_i(u_0 - u) = 0$ при всех $i = 1, \ldots, \alpha$ и, следовательно, $u_0 - u \in N$. Из условия (5.55) получим $F_i(u) = F_i(u_0 + (u - u_0)) = F_i(u_0) = 0$ при всех $i = 1, \ldots, \alpha$. Т.е. $u \in K$. Лемма 5.1 доказана.

Предложение 5.13 ([26]). *Пусть*

$$F = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} F_i, \quad A = F_0 + \sum_{1+\alpha \leqslant i \leqslant \beta} F_i, \tag{5.59}$$

тогда найдутся положительные постоянные μ *и* m *такие, что при всех* $u, v \in E$ *выполняются неравенства*

$$(Fu - Fv, u - v) \geqslant \mu \, p^2(u - v), \tag{5.60}$$

$$(Au - Av, u - v) \geqslant m \, \|u - v\|^2. \tag{5.61}$$

Доказательство этого предложения очевидным образом вытекает из эквивалентности норм $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$, определения операторов F_i и полунорм $p(\cdot)$.

Замечание 5.13. *Из леммы* 5.1 *и предложения* 5.13 *для операторов* A *и* F *вытекает справедливость условий* (5.2 – 5.8) *и, следовательно, всех утверждений, вытекающих из этих ограничений. Оценки* (5.56) *можно несколько ослабить, однако это приведет к громоздким обозначениям.*

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

Изучим уравнение

$$-\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i\,j}\, u_{x_j}) + a_0 u = f, \ x \in \omega, \tag{5.62}$$

где ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей, $\partial\omega = S_a \bigcup S_u$. Γ, S_a и S_u – замкнутые непересекающиеся измеримые относительно $(n-1)$ – мерной поверхностной меры поверхности и

$$u|_{S_u} = \frac{\partial u}{\partial N}|_{S_a} = 0, \ [u]|_\Gamma = [\rho(x)\frac{\partial u}{\partial N}]|_\Gamma = 0, \tag{5.63}$$

здесь $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{i\,j}\, u_{x_j} \nu_i$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – нормаль к S или Γ, символ $[u]|_\Gamma$ означает скачек, который испытывает функция u при переходе через Γ. Здесь мы рассмотрим случай, когда $\Gamma \subset \omega$ и Γ разбивает область ω на несколько областей $\omega = \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant \beta} \omega_i$ (здесь и ниже натуральные числа $\alpha < \beta$ имеют тот же смысл, что и в абстрактном построении этого раздела),

$$\overline{\omega}_i \cap \overline{\omega}_j = \emptyset, \ 1 \leqslant i < j \leqslant \alpha, \tag{5.64}$$

ω_i – области с регулярной границей при $i = 1, \ldots, \beta$;

$$\forall x \in \omega_i, \ \rho(x) = \rho_i, \ \rho_i = 1, \ i \leqslant \alpha, \quad \rho_i = 0, \ i > \alpha, \tag{5.65}$$

функции $a_{i\,j}(x) = a_{j\,i}(x) \in L_\infty(\omega), \ a_0(x) \in L_\infty(\omega), \ f \in L_2(\omega)$ (эти условия можно несколько ослабить, см. [13]), причем

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} a_{ij}\, t_i\, t_j \geqslant m_0 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} t_i^2, \quad m_0 > 0, \quad x \in \omega. \tag{5.66}$$

Другие дополнительные условия приведем ниже.

Пример 5.1 ([24]). *Пусть множество S_u имеет положительную $(n-1)$ – мерную поверхностную меру, а множество чисел $\{1, \ldots, \beta\}$ разбивается на четыре непересекающиеся подмножества I_1, I_2, I_3 и I_4, причем $I_1, I_2, I_3 \subset \{1, \ldots, \alpha\}$, $I_4 \subset \{\alpha + 1, \ldots, \beta\}$. Множество I_1 определяется условием: $\overline{\omega}_i \cap S_u \neq \emptyset, (i \leqslant \alpha)$.*

Рассмотрим задачу дифракции (5.62, 5.63, 5.65) *при следующих дополнительных условиях на коэффициенты a_0 и f:*

$$\begin{cases} a_0(x) \geqslant 0, \ x \in \omega_i, \ i \in I_1 \cup I_4, \\ a_0(x) = 0, \ x \in \omega_i, \ \displaystyle\int\limits_{\omega_i} f(x)\, d\,x = 0, \ i \in I_2, \\ a_0(x) \geqslant \lambda_0 > 0, \ x \in \omega_i, \ i \in I_3. \end{cases} \tag{5.67}$$

Обозначим символом E гильбертово пространство

$$E = \{u \in H^1(\omega) : u|_{S_u} = 0\}$$

со скалярным произведением и нормой в E

$$(u, v) = \int\limits_\omega \nabla u \nabla v\, d\,x, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Полунормы $p_i(\cdot)$ и норму $|\cdot|$ определим следующим образом

$$p_i(u) = |u|_{1,\,2,\,\omega_i}, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_4,$$
$$p_i(u) = \|u\|_{1,\,2,\,\omega_i}, \quad i \in I_3,$$
$$p^2(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} p_i^2(u),$$
$$|u|^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \beta} p_i^2(u),$$

причем нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны, и для любого $u \in E$ выполняется неравенство:

$$C(\omega)|u| \leqslant \|u\| \leqslant |u|$$

(первое неравенство является следствием формулы (1.11)).

По лемме 2.8 пара (E, p) обладает условием П.

Операторы F_i, $(i = 1, \ldots, \beta)$ введем так: пусть $F_i(u, v) : \ E \times E \to \mathbb{R}$ форма Дирихле, определяемая соотношением

$$F_i(u, v) = \int\limits_{\omega_i} \sum_{1 \leqslant r, j \leqslant n} (a_{rj} u_{x_r} v_{x_j} + a_0 uv - fv)\, d\, x.$$

Тогда тождество $F_i(u, v) = (F_i u, v)$ задает непрерывный оператор $F_i : \ E \to E$, удовлетворяющий при всех u, v из E оценке:

$$(F_i u - F_i v, u - v) \geqslant \mu p_i^2(u - v), \quad \mu = \min(m_0, \lambda_0). \tag{5.68}$$

Оператор $F_0 : \ E \to E$ можно ввести неоднозначно, например,

1) $F_0 = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} F_i$, или

2) $F_0 = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} a_i \int\limits_{\omega_i} \nabla u \nabla v\, d\, x + \sum\limits_{i \in I_3} b_i \int\limits_{\omega_i} uv\, d\, x,$

где a_i, b_i – положительные числа. Легко проверить, что при таком определении выполняется оценка

$$(F_0 u - F_0 v, u - v) \geqslant \mu p^2(u - v), \tag{5.69}$$

где μ – такое же, как в (5.68), если дано первое определение оператора F_0 или $\mu = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant \alpha,\, j \in I_3} \{a_i, b_j\}$ при втором определении оператора F_0.

Оценки (5.68–5.69) являются конкретными реализациями (5.56). Условие (5.55) выполняется очевидным образом, т.к. $N = \{u \in E : u = 0$ при $x \in \omega_i, \ i \in I_1 \cup I_3$ и $u = c_i, \ c_i \in \mathbb{R}$ при $x \in \omega_i, \ i \in I_2$.

Проверим теперь, что множество $K = \{\bigcap K_i, \ 1 \leqslant i \leqslant \alpha\}$ непусто.

Т.к. ω_i – ограниченные множества с регулярной границей, то сужение $\widehat{u}_i = u|_{\omega_i}$ элемента u из E на ω_i является элементом пространства $H^1(\omega_i)$.

Любой элемент $\widehat{u}_i$ пространства $E_i = H^1(\omega_i)$ может быть продолжен до элемента $\widetilde{u}_i$ равного нулю вне некоторой (произвольно фиксированной) окрестности множества $\overline{\omega}_i$. Это продолжение является элементом пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$, а его сужение на ω принадлежит пространству $E \cap H^1(\mathbb{R}^n)$.

Сужения операторов F_i на E_i при $i = 1, \ldots, \alpha$ обозначим символом $\widehat{F}_i$. Условия наложенные на коэффициенты a_{ij}, a_0 и функцию f позволяют утверждать, что множества $\widehat{K}_i = \{\widehat{u} \in E_i : \widehat{F}_i \widehat{u} = 0\}$ непусты при всех $i = 1, \ldots, \alpha$. Причем $\widehat{K}_i$ при $i \in I_2$ содержит бесконечно много элементов отличных друг от друга на постоянную, а при других i эти множества содержат по одному элементу.

Т.к. выполняется условие (5.64), то при $i = 1, \dots, \alpha$ существуют такие окрестности $\widehat{\omega}_i$ множеств $\overline{\omega}_i$, что замыкания их попарно не пересекаются.

Пусть $\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_\alpha$ – набор элементов из $\widehat{K}_1, \dots, \widehat{K}_\alpha$ соответственно. Этому набору соответствует набор их продолжений $\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_\alpha$, описанных выше. Элемент $u = \widetilde{u}_1 + \dots + \widetilde{u}_\alpha$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n)$, а его сужение на ω принадлежит E. Легко показать, что $F_i u = 0$ для $i = 1, \dots, \alpha$, и, следовательно, $u \in K$. Таким образом множество K непусто.

Сформулируем часть этого результата в виде теоремы.

Теорема 5.1 ([26]). *Пусть выполняются перечисленные выше условия. Тогда задача дифракции* (5.62, 5.63) *имеет единственное обобщенное решение, которое можно рассматривать как решение обобщенной краевой задачи* (5.7). *При этом выполняются условия* (5.27, 5.28, 5.30), *заключения предложения* 5.3 *и оценки* (5.31, 5.32, 5.36).

Замечание 5.14. *Обобщенная краевая задача* (5.7) *имеет единственное решение $u_0 \in K$, а т.к. $K = u_0 + N$, и $(F_0 u, v) = 0$ при всех $u \in E$, $v \in N$, то* (5.7) *можно переписать в виде следующей обобщенной краевой задачи: найти $u_0 \in K$ такой что*

$$\sum_{\alpha+1 \leqslant i \leqslant \beta} (F_i u_0, v) = 0, \quad \forall v \in N.$$

Таким образом при построении оператора A для решения задачи (5.7) *оператор F_0 носит вспомогательный характер и может выбираться лишь из соображений удобства. Если при этом множество I_2 пусто, то решение задачи дифракции определяется однозначно, даже при пустом множестве S_u (пример приведен ниже).*

Замечание 5.15. *Отметим так же, что постановка задачи дифракции в примере* 5.1 *отличается от постановки этой задачи в* §16 [13], *где функция $\rho(x)$, задающая граничные условия определяется так:*

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_1, \quad \rho(x) \in W^{1,q}(\omega_i), \quad q > n, \quad i = 1, \dots, \beta;$$

отсутствует условие (5.64) *и теорема существования доказана в предположении теоремы единственности. Отметим, что рассмотренный здесь случай задачи дифракции проще рассмотренного в* [13].

Рассмотрим метод фиктивных областей для задачи дифракции как одну из схем решения самой задачи дифракции.

Пример 5.2 ([26]). *Пусть множество S_a пусто,*

$$\omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < a_i + l_i,\ a_i, l_i \in \mathbb{R},\ l_i > 0, i = 1, \dots, n\},\ \overline{\omega} \subset\ \omega_0.$$

Рассмотрим в ω_0 задачу дифракции: найти $u \in H_0^1(\omega_0)$ такую, что

$$-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_{ij}u_{x_j}) + b_0 u = g,$$

где

$$b_{i,j}(x) = \begin{cases} a_{i,j}(x), & x \in \omega, \\ \delta_{i,j}, & x \in \omega_0 \setminus \overline{\omega}, \end{cases}$$

$$b_0(x) = \begin{cases} a_0(x), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \omega_0 \setminus \overline{\omega}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \omega_0 \setminus \overline{\omega}, \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_i \cup (\omega_0 \setminus \overline{\omega}), \ i \leqslant \alpha \\ 0, & x \in \omega_i, \ i > \alpha \end{cases}$$

на Γ выполняются условия (5.63) *и остальные условия примера* 5.1.

Для такой задачи дифракции справедлива теорема 5.1. При этом схемой МФО является уравнение (5.9), и справедливы оценки (5.27, 5.28, 5.30, 5.31, 5.35, 5.36).

Пример 5.3 ([26]). *Пусть $S_u = \emptyset$. Обозначим через E гильбертово пространство $H^1(\omega)$ со скалярным произведением и нормой*

$$(u, v) = \int\limits_{\omega} (\nabla u \nabla v + uv)\, d\, x, \quad \|u\|^2 = (u, u).$$

Пусть $p_i(\cdot) = \|\cdot\|_{1,2,\omega_i}$, т.е. отсутствуют множества I_1 и I_2, $a_0(x) \geqslant \lambda_0 > 0$ при всех $x \in \omega$, $N = \{u \in E : \quad u(x) = 0$ при $x \in \omega_i, \ i \leqslant \alpha\}$. Остальные построения , формулировки и доказательства переносятся дословно из примера 5.1.

5.5 Построение схем метода фиктивных областей для задачи с внутренним препятствием класса $H_0^1(\omega)$

В этом параграфе мы построим и докажем оценки скорости сходимости нескольких схем МФО задачи (4.14) с $\psi(x) \in H_0^1(\omega)$. Ниже будет рассмотрен более общий случай с $\psi(x) \in H^1(\omega)$, $\psi \leqslant 0$ на $\partial\omega$, при этом случае выбор схем МФО будет меньшим.

Пусть ω, ω_1 – ограниченные области с регулярными границами, $\overline{\omega} \subset \omega_1$, $E = H_0^1(\omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int\limits_{\omega_1}\nabla u\nabla v\,d\,x,\quad \|u\|^2=(u,u).$$

Пусть $\psi(x)$ и u_0 – барьерная функция и решение задачи (4.14). Обозначим теми же символами эти функции продолженные нулем вне ω, тогда $\psi(x),\ u_0\in E$.

Введем формы Дирихле $A(u,v),\ F(u,v):\ E\times E\to\mathbb{R}$

$$F(u,v)=\int\limits_{\omega}u^-\,v\,d\,x+\int\limits_{\omega_1\backslash\omega}(a\nabla u\nabla v+b\,u\,v)\,d\,x, \tag{5.70}$$

$$A(u,v)=\int\limits_{\omega_1}\nabla u\nabla v\,d\,x+c\int\limits_{\omega_1\backslash\omega}u\,v\,d\,x-\int\limits_{\omega}f\,v\,d\,x, \tag{5.71}$$

где $u^-(x)=\min(u(x)-\psi(x),0)$ при $x\in\omega_1$, a, b, c – неотрицательные числа такие, что $a+b\neq 0$. Из теоремы Рисса следует, что формы $A(u,v),\ F(u,v)$ порождают операторы A, $F:E\to E$ по формулам $(Au,v)=A(u,v)$, $(Fu,v)=F(u,v)$. Легко проверить, что операторы A и F радиально непрерывны и монотонны, причем

$$(Au-Av,u-v)\geqslant\|u-v\|^2,\quad F=F_1+F_2,\quad (F_1u,v)=\int\limits_{\omega_1\backslash\omega}(a\nabla u\nabla v+b\,u\,v)\,d\,x.$$

В соответствии со следствием 4.5 введем полунормы

$$r(u)=\|u\|_{0,\,2,\,\omega_1\backslash\overline{\omega}} \tag{5.72}$$

$$p^2(u)=\int\limits_{\omega_1\backslash\omega}(\nabla u\nabla u+s\,u^2)\,d\,x, \tag{5.73}$$

где $s=0$, если множество $\omega_1\backslash\overline{\omega}$ является областью и $s=1$ в противном случае. При таком определении $p(\cdot)$ является нормой в пространстве

$$X=\{u\in H^1(\omega_1\backslash\overline{\omega}):u(x)=0,\ x\in\partial\omega_1\},$$

$$q(u)=\|u\|_{0,\,2,\,\omega}. \tag{5.74}$$

Из определения операторов F_1, F_2 и A вытекают оценки

$$(F_1u-F_1v,u-v)\geqslant\alpha r^2(u-v)+\lambda p^2(u-v), \tag{5.75}$$

где α и λ определяются по формулам:

$\alpha=b,\ \lambda=a$ при $s=0$,

$\alpha=b,\ \lambda=0$ при $s=1$, $b>0$, $a=0$ и

$\alpha=\lambda=\min(a,b)/2$ при $s=1$, $a>0$, $b>0$

и равенства

$$(F_2 u, u^-) = q^2(u^-), \tag{5.76}$$

т.е. $\mu = 1$,

$$(Au - Av, u - v) \geqslant \|u - v\|^2, \tag{5.77}$$

т.е. $m = 1$.

Из оценок (5.75– 5.77) следует, что выполняются условия теоремы 4.5, где множество K определяется формулой

$$K = \{u \in E : Fu = 0\} = \{u \in E : u(x) \geqslant \psi(x),\ x \in \omega;\ u(x) = 0,\ x \in \omega_1 \backslash \omega\},$$

поэтому выполняется условие 1 следствия 4.5. Проверим теперь последовательно все требования условия 2 следствия 4.5.

Неравенства

$$r(u^-) \leqslant r(u),\ p(u^-) \leqslant p(u) \leqslant C\|u\|,\ \ r(u) \leqslant C_1 p(u)$$

очевидны. Неравенства монотонности для операторов F_1, F_2 и A отмечены в (5.75– 5.77).

Если $u_0 \in H^2(\omega)$, то

$$\begin{aligned}
|(Au_0, u)| &= |\int\limits_{\omega} (\nabla u_0 \nabla u - fu)\, d\,x| \leqslant \\
&\leqslant |\int\limits_{\omega} (\triangle u_0 + f)\, u\, d\,x| + |\int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial u_0}{\partial n}\, u\, d\,\sigma| \leqslant \\
&\leqslant \|\triangle u_0 + f\|_{0,2,\omega} q(u) + C(\omega_1 \backslash \omega) \|\nabla u_0\|_{0,2,\partial\omega}\, r^{1/2}(u) p^{1/2}(u).
\end{aligned}$$

Осталось для каждого элемента $u \in E$ построить такой элемент u^*, что $u^+ - u^* \in K$, где $u^+ = u - u^-$ и выполняются неравенства

$$r(u^*) \leqslant r(u),\ \ p(u^*) \leqslant p(u),\ \ q(u^*) \leqslant C_2 r(u).$$

Т.к. $\omega_1 \backslash \overline{\omega}$ либо ограниченная область с регулярной границей, либо объединение конечного числа таких областей с непересекающимися замыканиями, то для любого элемента u и E функция $u|_{\omega_1 \backslash \overline{\omega}}$ имеет продолжение $u^{\#}$, принадлежащее E, при этом справедлива оценка (см. [15], [22]) или лемму 1.4:

$$\|u^{\#}\|_{0,2,\omega_1} \leqslant C(\omega, \omega_1)\, r(u).$$

Из построения функции $u^{\#}$ вытекает справедливость следующих равенств

$$p(u^{\#}) = p(u),\ \ r(u^{\#}) = r(u).$$

Обозначим через u^* следующий элемент пространства E :

$$u^* = u^+ - (u^+ - u^{+\#})^+.$$

По построению $u^+ - u^* = (u^+ - u^{+\#})^+ \in K$, и $|u^*| \leqslant |u^{+\#}|$. Действительно,

$$u^* = u^+ - (u^+ - u^{+\#})^+ = \begin{cases} u^{+\#}, & \text{если } u^+ - u^{+\#} \geqslant \psi, \\ 0, & \text{если } u < \psi,\ u^+ - u^{+\#} < \psi, \\ u^+ - \psi, & \text{если } u \geqslant \psi,\ u^+ - u^{+\#} < \psi, \end{cases}$$

Т.к. $u^+ \geqslant \psi$, то последнее неравенство в этих соотношениях означает, что $0 \leqslant u^+ - \psi < u^{+\#}$. Что доказывает исследуемое неравенство. Т.е. справедлива цепочка неравенств

$$\|u^*\|_{0,2,\omega_1} \leqslant \|u^{+\#}\|_{0,2,\omega_1} \leqslant C(\omega, \omega_1) r(u^+) \leqslant C(\omega, \omega_1) r(u).$$

Т.к. $u^+ - u^* \in K$, то $(u^+ - u^*)|_{\omega_1 \setminus \omega} = 0$, т.е.

$$p(u^*) = p(u^+) \leqslant p(u), \quad r(u^*) = r(u^+) \leqslant r(u).$$

Таким образом доказаны все условия следствия 4.5 и, следовательно, справедлива

Теорема 5.2 ([26]). *Пусть задача* (4.14) *при* $\psi \in H_0^1(\omega)$ *имеет решение в классе* $H_0^1(\omega) \bigcap H^2(\omega)$.

Тогда вспомогательная задача: найти $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$, *такое, что при всех* $v \in H_0^1(\omega_1)$ *выполняется тождество*

$$\int\limits_{\omega_1 \setminus \omega} (a \nabla u \nabla v + b\, uv)\, d\, x + \int\limits_{\omega} u^- v\, d\, x +$$
$$+ \varepsilon(\int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v\, d\, x + c \int\limits_{\omega_1 \setminus \omega} u\, v\, d\, x - \int\limits_{\omega} f\, v\, d\, x) = 0$$

при $\varepsilon > 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \neq 0$, $c \geqslant 0$ *имеет единственное решение.*

Причем

1) $u_\varepsilon \to u_0$ *при* $\varepsilon \to +0$, *где* u_0 *продолженное нулем вне* ω *решение задачи* (4.14);

2) *если множество* $\omega_1 \setminus \overline{\omega}$ *– область, тогда справедливы оценки* (4.11), (4.12) *с* $\tau = 1/2$ *и* (4.13), *причем* $\alpha = \beta$, $\lambda = a$, $m = \mu = C = 1$, $C_1 = C_1(\omega_1 \setminus \overline{\omega})$ *– константа из формулы* (1.11), $C_2 = C_2(\omega, \omega_1)$ *– константа из леммы* 1.4, $C_3 = \|\triangle u_0 + f\|_{0,2,\omega}$ *и* $C_4 = C(\omega_1 \setminus \overline{\omega}) \cdot \|\nabla u_0\|_{0,2,\partial\omega}$, *здесь* $C(\omega_1 \setminus \overline{\omega})$ *– постоянная из формулы* (1.12);

3) *если* $\omega_1 \setminus \overline{\omega}$ *является объединением конечного числа ограниченных областей с регулярной границей, замыкания которых не пересекаются, то формулы* (4.11)

и (4.13) *справедливы с* $\alpha = \lambda = \min(a,b)/2$, $a,b > 0$, *формула* (4.12) *справедлива при* $\alpha = b$, $\lambda = a = 0$, *а остальные константы имеют тот же смысл, что и в заключении* 2.

5.6 Построение схем метода фиктивных областей для задачи с внутренним препятствием класса $H^1(\omega)$

Здесь мы построим схему метода фиктивных областей в общем случае при $\psi \in H^1(\omega)$, $\psi \leqslant 0$ на $\partial\omega$. Для рассмотрения этой задачи нам потребуются несколько предварительных абстрактных построений.

Пусть E – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (u,v), нормой $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ и непрерывной полунормой $p(\cdot)$ такой, что пара (E,p) обладает условием П. E^* – пространство линейных непрерывных функционалов над E, $< f, u >$ – значение функционала f из E^* на элементе u из E. $N = \{u \in E :\ p(u) = 0\}$ – замкнутое подпространство в E. H – гильбертово пространство со со скалярным произведением $(u,v)_0$ и нормой $|u| = (u,u)_0^{1/2}$, причем $|u| \leqslant \delta\|u\|$ при некотором положительном δ.

Предположим далее, что $H = H^*$, $E \subset H \subset E^*$ и замыкание E по норме $|\cdot|$ совпадает с H, т.е. $\overline{E} = H$. Операторы A и $F : E \to E^*$ радиально непрерывны. Оператор F монотонен, а оператор A ограничен и сильно монотонен, т.е.

$$(Au - Av, u - v) \geqslant m(u,v), \tag{5.78}$$

где $m(u,v)$ – функция из определения 3.2. Кроме этого будем считать, что при любых $u \in N$, $v \in E$ оператор F удовлетворяет условиям

$$Fu \in \overline{N}, \tag{5.79}$$

$$< Fu - Fv, u - v > \geqslant \mu p^{1+\gamma}(v),\ \gamma > 0,\ \mu > 0, \tag{5.80}$$

$$< Fu, v >= (Fu, v)_0, \tag{5.81}$$

$$K = K \cap N \neq \emptyset, \tag{5.82}$$

где $K = \{u \in E : Fu = 0\}$. При выполнение этих условий справедлива следующая теорема:

Теорема 5.3 ([26]). *Пусть выполняются все перечисленные выше условия. Тогда*

1) *обобщенная краевая задача: найти элемент* $v_\varepsilon \in N$, *такой, что*

$$< Fv_\varepsilon - \varepsilon A v_\varepsilon, v > = 0,\ \varepsilon > 0,\ \forall v \in N, \tag{5.83}$$

имеет единственное решение v_ε такое, что v_ε сильно в E сходится при $\varepsilon \to +0$ к единственному решению $u_0 \in K$ вариационного неравенства

$$< Au_0, u - u_0 > \geqslant 0, \quad \forall u \in K; \tag{5.84}$$

2) *справедлива оценка*

$$\|Fv_\varepsilon\|_{E^*} \leqslant C\varepsilon, \ \varepsilon \in (0,1]; \tag{5.85}$$

3) *уравнение*

$$Fu + \varepsilon Au = 0, \ \varepsilon > 0 \tag{5.86}$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$ и при $\varepsilon \to +0$ $u_\varepsilon \to u_0$;

4) *выполняются оценки*

$$p(u_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{1/\gamma}, \ \varepsilon \in (0,1], \tag{5.87}$$

$$m(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{1/\gamma}, \ \varepsilon \in (0,1], \tag{5.88}$$

здесь и ниже в этом разделе символом C обозначаются разные положительные постоянные не зависящие от ε.

Доказательство.

1) Заключения 1, 3 теоремы 5.3 следует из следствия 4.2 и замечания 4.7;

2) докажем оценку (5.85). По теореме Рисса для E существует взаимно однозначное соответствие R пространства E^* на E, обладающее для любых $u \in E$, $f \in E^*$ свойствами:

$$(Rf, u) = < f, u >, \quad \|Rf\| = \|f\|_{E^*}.$$

Покажем, что $R(Fv_\varepsilon) \in N$. Действительно, пространство E разлагается на прямую сумму подпространств N и $N^\perp$. Элемент v принадлежит подпространству N тогда и только тогда, когда $(v, u) = 0$ при всех $u \in N^\perp$. Пусть $u \in N^\perp$, а последовательность $\{v_n\}$ элементов подпространства N такова, что $|v_n - R(Fv_\varepsilon)| \to 0$ при $n \to \infty$. Такая последовательность существует, т.к. выполняется включение (5.79). Т.е. справедлива цепочка соотношений:

$$(R(Fv_\varepsilon), u) = < Fv_\varepsilon, u > = (Fv_\varepsilon, u)_0 = \lim_{n\to\infty} (v_n, u) = 0.$$

Таким образом $R(Fv_\varepsilon) \in N$, поэтому из (5.83) при $v = R(Fv_\varepsilon)$ получим

$$\|Fv_\varepsilon\|^2_{E^*} = < Fv_\varepsilon, R(Fv_\varepsilon) > = -\varepsilon < Av_\varepsilon, R(Fv_\varepsilon) > \leqslant$$
$$\leqslant \ \varepsilon \|Av_\varepsilon\|_{E^*} \|R(Fv_\varepsilon)\|_E = \varepsilon \|Av_\varepsilon\|_{E^*} \|Fv_\varepsilon\|_{E^*}.$$

Из этих соотношений имеем

$$\|Fv_\varepsilon\|_{E^*} \leqslant \varepsilon \|Av_\varepsilon\|_{E^*}.$$

Неравенство (5.85) является следствием ограниченности оператора A и множества $\{v_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,1]$;

3) докажем теперь оценки (5.87, 5.88).

Пусть v_ε – решение задачи 5.83), а u_ε – решение уравнения 5.86), тогда используя (П) свойство пары (E,p) получим:

$$\begin{aligned}&\mu p^{\gamma+1}(u_\varepsilon) + \varepsilon m(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant < Fv_\varepsilon - Fu_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon > + \\ &+\varepsilon < Av_\varepsilon - Au_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon > = - < Fv_\varepsilon + \varepsilon Av_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon > \leqslant \\ &\leqslant C \, \|Fv_\varepsilon + \varepsilon Av_\varepsilon\|_{E^*} p(v_\varepsilon - u_\varepsilon) \leqslant C_1 \, p(u_\varepsilon).\end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство в этой цепочке соотношений является следствием уравнения 5.83) и (П) свойство пары (E,p), а последнее неравенство вытекает из включения $v_\varepsilon \in N$. Из этих соотношений следуют оценки (5.87,5.88). Теорема 5.3 доказана полностью.

Пример 5.4 ([26]). *Пусть ω и ω_1 – ограниченные области $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей, $\overline{\omega} \subset \omega_1$. Решение u_0 задачи с препятствием (4.14) принадлежит классу функций $H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega)$. Символом u_0 мы будем ниже обозначать и нулевое продолжение вне ω функции u_0, такое продолжение принадлежит $H_0^1(\omega_1)$.*

Пусть $E = H_0^1(\omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v) = \int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v \, d\,x$ и нормой $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ и полунормой $p(u) = \|u\|_{1,2,\omega_1\setminus\omega}$.

По лемме 2.8 пара $((E,p)$ обладает условием (П). Из определения полунормы $p(\cdot)$ следует, что $N = \{u \in E : u|_{\omega_1\setminus\omega} = 0\}$.

Пусть $H = L_2(\omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v)_0 = \int\limits_{\omega_1} uv \, d\,x$ и нормой $|u| = \|u\|_{0,2,\omega_1}$, $\overline{N} = \{u \in H : u|_{\omega_1\setminus\omega} = 0\}$.

Операторы A и F определим через формы Дирихле $A(u,v)$, $F(u,v)$: $E \times E \to \mathbb{R}$.

$$A(u,v) = \int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v \, d\,x - \int\limits_{\omega} fv \, d\,x,$$

$$F(u,v) = \int\limits_{\omega_1\setminus\omega} (\nabla u \nabla v + uv) \, d\,x + \int\limits_{\omega} u^- v \, d\,x,$$

где

$$u^-(x) = \min(u(x) - \psi(x), 0), \; x \in \omega, \; f \in L_2(\omega), \; \psi \in H^1(\omega), \; \psi|_{\partial\omega} \leqslant 0.$$

Операторы A и F : $E \to E^*$ определим стандартно соотношениями $< Au, v > = A(u,v)$, $< Fu, v > = F(u,v)$. Легко проверить, что условия (5.78 – 5.82) выполняются с

$$m(u,v) = \|u - v\|^2, \; \mu = \gamma = 1, \; K = \{u \in E : \; u|_{\omega_1\setminus\omega} = 0, \; u|_\omega \geqslant \psi\}.$$

Задача (5.83) *эквивалентна задаче: найти* $v_\varepsilon \in H_0^1(\omega)$, *такое , что*

$$\int\limits_\omega v_\varepsilon^- v\,d\,x + \varepsilon \int\limits_\omega (\nabla v_\varepsilon \nabla v - fv)\,d\,x = 0,\ \forall v \in H_0^1(\omega),\ \varepsilon > 0. \qquad (5.89)$$

Эта задача уже изучена в предложении 4.1. *Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения:*

Предложение 5.14 ([26]). *Пусть задача с внутренним препятствием* (4.14) *разрешима в классе функций* $H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega)$.

Тогда вспомогательная задача (схема МФО задачи с внутренним препятствием): найти $u \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что*

$$\int\limits_{\omega_1 \backslash \omega} (\nabla u \nabla v + uv)\,d\,x + \int\limits_\omega u^- v\,d\,x + \varepsilon(\int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v\,d\,x - \int\limits_\omega fv\,d\,x) = 0,$$

при $\varepsilon > 0$, $\forall v \in H_0^1(\omega_1)$ *имеет единственное решение* $u = u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon \to +0$ *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0, *где* $u_0|_{\omega_1 \backslash \omega} = 0$, $u_0|_\omega$ – *решение задачи с внутренним препятствием* (4.14) *и выполняются оценки скорости сходимости:* $\|u_\varepsilon\|_{1,2,\omega_1 \backslash \omega} \leqslant C\varepsilon$, $|u_\varepsilon - u_0|_{1,2,\omega_1} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

5.7 Абстрактная схема МФО смешанной краевой задачи

В этом разделе всюду мы не будем уточнять вид постоянных в оценках. Таким образом одной и той же константой C могут обозначаться разные константы, не зависящие от ε.

Пусть E – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $p_i(\cdot)$ – непрерывные полунормы в E, $i = 0, 1, \dots, n, n+1$, где $p_0(\cdot) = 0$, а $p_{n+1}(\cdot) = \|\cdot\|$, при этом выполняются следующие формы подчиненности полунорм:

$$p_{i-1}(\cdot) \leqslant p_i(\cdot), i = 1, \dots, n+1.$$

Поэтому замкнутые подпространства

$$N_i = \{u \in E : p_i(u) = 0\}$$

удовлетворяют условию:

$$\{0\} = N_{n+1} \subset N_n \subset \dots \subset N_0 = E. \qquad (5.90)$$

Предположим, также, что пары $(E, p_1), \dots, (E, p_n)$ обладают свойством (П).

Сделаем теперь предположения относительно операторов. Пусть

$$F_i : E \to E^*, i = 0, 1, \dots, n+1$$

– монотонные радиально непрерывные операторы. Причем $F_0 = 0$ и $\forall u, v \in E$, $x_i, y_i \in N_i,\ i = 0, 1, \ldots, n+1$ выполняются соотношения:

$$(F_i u - F_i v, u - v) \geqslant \mu_i p_i^2(u - v), \quad \mu_i > 0, \tag{5.91}$$

$$(F_i(u + x_i), v + y_i) = (F_i u, v). \tag{5.92}$$

В частности из (5.92) следует, что $F_i(u + x_i) = F_i u$. Кроме этого отметим, что оценки (5.91) можно ослабить (см., например, предложения 5.4 – 5.7), однако это приведет к громоздким обозначениям и доказательствам. В каждом конкретном случае при более слабых ограничениях (5.91) оценки скорости сходимости и их обоснования можно получить по приведенной ниже схеме.

Введем множества

$$K_0 = N_0 = E,\ K_i = \{u \in K_{i-1} : (F_i u, v) = 0, \forall v \in N_{i-1}\} \tag{5.93}$$

и предположим, что

$$K_i \neq \emptyset,\ i = 0, 1, \ldots n+1 \tag{5.94}$$

Предложение 5.15 ([26]). *Пусть ψ_i произвольный элемент множества K_i, тогда*

$$K_i = \psi_i + N_i. \tag{5.95}$$

Доказательство этого предложения проведем по индукции. Для $i = 0$ равенство (5.95) очевидно, т.к. $N_0 = E$, а при $i = 1$ это предложение доказывается так: из условия (5.92) при $\psi \in K_1$ и всех $x \in N_1$ получим $0 = F_1\psi = F_1(\psi + x)$, т.е. $\psi + N_1 \subset K_1$. Докажем обратное включение. Пусть u – произвольный элемент множества K_1, тогда, т.к. $F_1\psi = F_1 u = 0$, то $(F_1\psi - F_1 u, \psi - u) = 0$, а из 5.91 получим, что, если $u - \psi \notin N$, то $(F_1\psi - F_1 u, \psi - u) \geqslant \mu_1 p_1^2(\psi - u) > 0$.

Пусть (5.95) справедливо для произвольного $\psi_i \in K_i$ и $i \leqslant j$, докажем (5.95) для $i = j+1$.

Для u и $\psi \in K_{j+1}$ из (5.93) имеем u, $\psi \in K_j$. По предположению индукции $u \in \psi + N_j$, т.е. $u - \psi \in N_j$. Т.к. u и $\psi \in K_{j+1}$, то из (5.91) и (5.93) получим $(F_{j+1}\psi, u - \psi) = 0$ и $(F_{j+1}u, u - \psi) = 0$, т.е. справедлива цепочка соотношений:

$$0 = (F_{j+1}u - F_{j+1}\psi, u - \psi) \geqslant \mu_{j+1}\, p_{j+1}^2(u - \psi),$$

из которой получим $p_{j+1}(u - \psi) = 0$, т.е. $u - \psi \in N_{j+1}$. Таким образом мы установили для $\forall u, \psi \in K_{j+1}$ включение $u \in \psi + N_{j+1}$.

Обратно, пусть $\psi \in K_{j+1}$, $v \in N_{j+1}$, тогда из (5.92) вытекает $F_{j+1}(v + \psi) = F_{j+1}\psi$, а из (5.93) получим для любых $u \in N_j$ равенство: $0 = (F_{j+1}\psi, u) = (F_{j+1}(\psi + v), u)$, т.е. $\psi + v \in K_{j+1}$ и, следовательно, равенство (5.95) получено при $i = j+1$, что доказывает предложение индукции и предложение 5.15.

Предложение 5.16 ([26]). *Справедливы вложения*

$$K_{i+1} \subset K_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{5.96}$$

Доказательство этих вложений вытекает из определения множеств K_i в формуле (5.93).

Предложение 5.17 ([26]). *Для некоторого $u_0 \in E$ справедливо равенство*

$$K_{n+1} = \bigcap_{0 \leqslant i \leqslant n+1} K_i = \{u_0\}. \tag{5.97}$$

Доказательство. Из (5.94) и (5.96) вытекает, что множество $\bigcap\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} K_i$ не пусто, а т.к. $p_{n+1}(\cdot) = \|\cdot\|$, то из (5.91) вытекает сильная монотонность оператора F_{n+1} и, следовательно, K_{n+1} не может содержать более двух элементов.

Действительно, пусть K_{n+1} содержит два элемента u и v. Из (5.93) и (5.96) и включения $u - v \in N_n$ получим противоречие:

$$0 = (F_{n+1}u - F_{n+1}v, u - v) \geqslant \mu_{n+1}\|u - v\|^2,$$

что доказывает (5.97) и предложение 5.17.

Из предложений 5.15 – 5.17 вытекает справедливость следующей леммы о структуре множеств K_i:

Лемма 5.2 ([26]). *Существует единственный элемент u_0, такой, что*

$$K_i = u_0 + N_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{5.98}$$

и

$$(F_{i+1}u_0, x_k) = 0, \ \forall x_k \in N_k, \quad k \geqslant i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.99}$$

Предложение 5.18 ([26]). *Уравнение*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \varepsilon^{i-1} F_i u = 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.100}$$

имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$. И выполняется оценка

$$p_1(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0; 1]. \tag{5.101}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда оператор $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \varepsilon^{i-1} F_i$ является сильно монотонным и радиально непрерывным. Поэтому по следствию 3.3 уравнение (5.100) имеет единственное решение $u = u_\varepsilon$. Из (5.93), (5.99) имеем $(F_1 u_0, u) = 0$ при всех $u \in N_0$, но $N_0 = E$, поэтому $F_1 u_0 = 0$, следовательно, справедлива цепочка соотношений:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \mu_i \varepsilon^{i-1} p_i^2(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \varepsilon^{i-1}(F_i u_\varepsilon - F_i u_0, u_\varepsilon - u_0) =$$
$$= -\varepsilon \sum_{2 \leqslant i \leqslant n+1} \varepsilon^{i-2}(F_i u_0, u_\varepsilon - u_0) \leqslant \varepsilon C \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon^{i-1} p_i(u_\varepsilon - u_0).$$

Здесь в последнем неравенстве использовано (П) свойство пар (E, p_i).

Как следствие, из этих соотношений получим неравенство:

$$\mu_1 \left(p_1(u_\varepsilon - u_0) - \frac{C\varepsilon}{2\mu_1} \right)^2 \leqslant \varepsilon^2 C_1,$$

из которого получим (5.101). Предложение 5.18 доказано.

Лемма 5.3 ([26]). *Пусть F_i $(i = 2, \dots, n+1)$ являются липшиц-непрерывными операторами, т.е.*

$$\|F_i u - F_i v\| \leqslant M\|u - v\|, \quad M > 0, \tag{5.102}$$

Тогда справедливы оценки

$$\|F_i u - F_i v\| \leqslant M_1 p_i(u - v), \quad M_1 > 0, \tag{5.103}$$

и для произвольного $\varepsilon \in (0;1]$ выполняется неравенство

$$\begin{gathered} \sum_{i \leqslant k \leqslant n+1} \mu_k \varepsilon^{k-i} p_k^2(u_\varepsilon - u_0) \leqslant \\ \leqslant (C p_{i-1}(u_\varepsilon - u_0)(p_i(u_\varepsilon - u_0) + \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant n+1} \varepsilon^{k-i}(p_k(u_\varepsilon - u_0) + C)) + \\ + C \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant n+1} \varepsilon^{k-i} p_k(u_\varepsilon - u_0) \end{gathered} \tag{5.104}$$

Доказательство.

1) т.к. пара (E, p_i) удовлетворяет условию (П), а оператор (F_i) удовлетворяет условию (5.92), то из (5.102) получим:

$$\forall u, \ v \in E, w \in N_i : \quad F(u + w) = Fu$$

и

$$\|F_i u - F_i v\| \leqslant M \inf\{\|u - v + w\|, w \in N_i\} \leqslant MC p_i(u - v).$$

Таким образом неравенство (5.103) доказано с $M_1 = CM$.

2) докажем теперь оценку (5.104). Элемент u_ε является решением уравнения (5.100), а u_0 удовлетворяет тождествам (5.99), то из (П) свойства пар (E, p_i) получим для произвольного $u \in E, \ w \in N_{i-1}$:

$$\begin{aligned} &|(-F_i u_0 + \sum_{i \leqslant k \leqslant n+1} \varepsilon^{k-i} F_k u_\varepsilon, u)| = \\ =&|(-F_i u_0 + \sum_{i \leqslant k \leqslant n+1} \varepsilon^{k-i} F_k u_\varepsilon, u + w)| \leqslant \\ \leqslant&(\|F_i u_0 - F_i u_\varepsilon\| + \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant n+1} \|\varepsilon^{k-i} F_k u_\varepsilon\|) \cdot p_{i-1}(u), \end{aligned} \tag{5.105}$$

(отметим в скобках подробнее, что u_ε является решением уравнения (5.100), и из тождеств (5.92) получим)

$$\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}(\varepsilon^{k-i}F_k u_\varepsilon, w)=0,\quad \forall w\in N_{i-1}. \tag{5.106}$$

Из (5.103) имеем

$$\|F_i u_\varepsilon\|\leqslant M_1 p_i(u_\varepsilon-u_0)+\|F_i u_0\| \tag{5.107}$$

Из (5.101), (5.105), (5.106) получим

$$\begin{gathered}\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}\mu_k\varepsilon^{k-i}p_k^2(u_\varepsilon-u_0)\leqslant\\ \leqslant\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}(F_k u_\varepsilon-F_k u_0,u_\varepsilon-u_0)\leqslant\\ \leqslant(-F_i u_0+\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}F_k u_\varepsilon,u_\varepsilon-u_0)-\\ -\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}(F_k u_0,u_\varepsilon-u_0).\end{gathered} \tag{5.108}$$

Из (5.105), (5.106),(5.107) и свойства (П) получим

$$\begin{aligned}&(\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}-F_i u_0+\varepsilon^{k-i}F_k u_\varepsilon,u_\varepsilon-u_0)\leqslant Cp_{i-1}(u_\varepsilon-u_0)\cdot\\ &\cdot(\|F_i u_\varepsilon-F_i u_0\|+\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}\|F_k u_\varepsilon\|)\leqslant Cp_{i-1}(u_\varepsilon-u_0)\cdot\\ &\cdot(p_i(u_\varepsilon-u_0)+\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}(p_i(u_\varepsilon-u_0)+C)\end{aligned} \tag{5.109}$$

и

$$-\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}(F_k u_0,u_\varepsilon-u_0)\leqslant C\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n+1}\varepsilon^{k-i}p_{k-1}(u_\varepsilon-u_0). \tag{5.110}$$

Объединяя оценки (5.109), (5.110) получим (5.104). Лемма 5.3 доказана.

Теорема 5.4 ([26]). *Пусть операторы* F_i $(i=2,\dots,n+1)$ *удовлетворяют условию Липшица* (5.102). *Тогда*

1) *уравнение* (5.100) *имеет единственное решение* $u=u_\varepsilon$*;*
2) *при* $\varepsilon\to+0$ u_ε *сильно в* E *сходится к* u_0*;*
3) *справедливы оценки*

$$p_m(u_\varepsilon-u_0)\leqslant C\varepsilon,\quad m=1,\dots,n+1. \tag{5.111}$$

Доказательство. Из тождеств (5.92), (5.99) уравнения (5.100) и П свойства пары E,p_n получим неравенство

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}\|u_\varepsilon-u_0\|^2&\leqslant(F_{n+1}u_\varepsilon-F_{n+1}u_0,u_\varepsilon-u_0)\leqslant\\ &\leqslant C\|F_{n+1}u_\varepsilon-F_{n+1}u_0\|\,p_n(u_\varepsilon-u_0),\end{aligned}$$

т.е. справедливо неравенство

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \leqslant C\, p_n(u_\varepsilon - u_0). \tag{5.112}$$

Покажем сначала, что $p_k(u_\varepsilon - u_0)$ ограничены, т.е. ограничена последовательность $\|u_\varepsilon\|$. Из (5.101) получим $p_1(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C$, далее проведем доказательство по индукции. Предположим, что $p_{i-1}(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C$ и получим это ограничение для $p_i(u_\varepsilon - u_0)$. Из (5.104) имеем

$$\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \mu_k \varepsilon^{k-i} p_k^2(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C \sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \varepsilon^{k-i} p_k(u_\varepsilon - u_0) + C,$$

т.е.

$$\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \mu_k \varepsilon^{k-i} (p_k(u_\varepsilon - u_0) - C/2\mu_k)^2 \leqslant C_1,$$

откуда следует, что

$$\mu_i p_i(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C.$$

Т.е. предложение индукции доказано.

Докажем теперь (5.111). Из (5.112) следует, что достаточно доказать (5.111) для $m = 1, \ldots, n$. Сделаем это по индукции. Для $m = 1$ неравенство (5.111) доказано в предложении 5.18. Предположим, что доказываемое неравенство справедливо при $m = 1, \ldots, i-1$. Докажем его для $m = i$. Из предположения индукции имеем $p_{i-1}(u_\varepsilon - u_0) \leq C\varepsilon$, тогда из (5.104) получим

$$\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \mu_k \varepsilon^{k-i} p_k^2(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\varepsilon \sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \varepsilon^{k-i} p_k(u_\varepsilon - u_0) + C_1\varepsilon^2,$$

т.е

$$\sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \mu_k \varepsilon^{k-i} (p_k(u_\varepsilon - u_0) - \frac{C\varepsilon}{2\mu_k})^2 \leqslant C_1\varepsilon^2 + C^2\varepsilon^2 \sum_{i\leqslant k\leqslant n+1} \frac{\varepsilon^{k-i}}{4\mu_k}$$

или $p_i(u_\varepsilon - u_0) \leqslant C\varepsilon$. Предложение индукции и, следовательно, теорема 5.4 доказаны.

5.8 Некоторые конкретные примеры применения абстрактной схемы МФО смешанной краевой задачи

В качестве примеров применения теоремы 5.4 построим несколько схем МФО задач со смешанными краевыми условиями, схемы МФО для задачи дифракции дополнительные к схеме примера 5.2.

Для того чтобы, как это случилось при рассмотрении схем МФО задачи дифракции, не вводить громоздких обозначений, сделаем несколько упрощающих предположений: пусть ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – ограниченные односвязные области $\mathbb{R}^n$ с регулярными границами, $\overline{\omega}_{i+1} \subset \omega_i,\ \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Пример 5.5 ([26]). *Рассмотрим в* $\omega = \omega_2 \backslash \overline{\omega}_3$ *краевую задачу:*

$$- \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} u_{x_j} + a_0 u = f; \tag{5.113}$$

$$u|_{S_1} = \psi, \left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_{S_2} = \varphi - \gamma u, \tag{5.114}$$

где подмножества S_1 и S_2 границы $\partial\omega$ определены ниже,

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad N = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

N – вектор внешней нормали к $\partial\omega$, $\gamma \geqslant 0$, $\psi \in H_0^1(\omega_1)$, $\varphi \in H^1(\omega)$, $a_{ij} = a_{ji} \in L_\infty(\omega)$, $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} t_i t_j \geqslant \mu \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} t_i^2$, $\mu > 0$, $a_0 \in L_\infty(\omega)$, $a_0 \geqslant 0$. Обобщенным решением задачи (5.113) (5.114) назовем элемент

$$u \in K = \{u \in \ H^1(\omega): \ u|_{S_1} = \psi, \}$$

такой, что

$$\forall v \in N_{S_1} = \{u \in \ H^1(\omega): \ u|_{S_1} = 0, \}$$

справедливо тождество:

$$\int\limits_\omega \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 u v - f v \right) dx + \int\limits_{\partial\omega} (\gamma u - \varphi)\, v d\sigma = 0. \tag{5.115}$$

Замечание 5.16. *Обобщенная постановка задачи* (5.113), (5.114) *дает еще один пример конкретной реализации обобщенной краевой задачи* (5.7).

Построим теперь схему МФО задачи (5.113), (5.114).

Предложение 5.19 ([26]). *Пусть* $S_1 = \partial\omega_2$, $S_2 = \partial\omega_3$. *Тогда*

1) *задача найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $v \in H_0^1(\omega_1)$ *выполняется тождество:*

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon) \int\limits_{\omega_1 \backslash \omega_2} (\nabla(u-\psi)\nabla v + \lambda(u-\psi)\, v) d\,x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_\omega \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 u v - f v \right) d\,x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_{S_2} (\gamma u - \varphi) v d\,\sigma + \varepsilon^2 \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + \alpha u\, v) d\,x = 0, \\
&\varepsilon > 0, \lambda \geqslant 0, \alpha \geqslant 0
\end{aligned} \tag{5.116}$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon \to +0$ u_ε сильно в $H_0^1(\omega_1)$ сходится к u_0;

2) $u|_{\omega_1 \setminus \overline{\omega}_2} = \psi$;

3) $u_0|_\omega$ – *обобщенное решение задачи* (5.115);

4) *функция u_0 имеет минимальную норму $|\cdot|_{1,2,\omega_1} + \alpha\|\cdot\|_{0,2,\omega_1}$ среди всех функций, удовлетворяющих условиям предыдущих заключений этого предложения;*

5) *выполняется оценка скорости сходимости $|u_\varepsilon - u_0|_{1,2,\omega_1} \leqslant C\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $E = H_0^1(\omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой:

$$(u,v) = \int\limits_{\omega_1} \nabla u \nabla v \, d\,x, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2}.$$

Введем в E полунормы

$$p_1(u) = |u|_{1,2,\omega_1 \setminus \overline{\omega}_2}, \quad p_2(u) = |u|_{1,2,\omega_1 \setminus \overline{\omega}_3},$$

и подпространства

$$N_1 = \{u \in E : u|_{\omega_1 \setminus \overline{\omega}_2} = 0\}, \quad N_2 = \{u \in E : u|_{\omega_1 \setminus \overline{\omega}_3} = 0\}.$$

По лемме 1.8 пары (E, p_1) и (E, p_2) обладают свойством (П).

Введем теперь формы Дирихле $F_i(u,v) : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3)$:

$$F_1(u,v) = \int\limits_{\omega_1 \setminus \overline{\omega}_2} \nabla(u-\psi)\nabla v + \lambda(u-\psi) v \, d\,x,$$

$$F_2(u,v) = \quad F_1(u,v) + \int\limits_{\omega} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 uv - fv \right) d\,x + \\ + \int\limits_{S_2} (\gamma u - \varphi) v d\,\sigma,$$

$$F_3(u,v) = \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + \alpha uv \, d\,x).$$

Эти формы задают операторы: $F_i : \ E \to E, \ (i = 1, \ 2, \ 3) : F_i(u,v) = (F_i u, v)$. Легко проверить, что эти операторы удовлетворяют условиям (5.91), (5.92), непрерывны и удовлетворяют условию Липшица:

$$\|F_i u - F_i v\| \leqslant M_i \|u - v\| \ \ (i = 1, \ 2, \ 3).$$

Напомним, что $p_3(u) = \|u\|$.

Рассмотрим множества K_i:

$$K_1 = \{u \in E : F_1 u = 0\} = \{u \in E : u|_{\omega_1 \setminus \omega_2} = \psi\}$$
$$K_2 = \{u \in K_1 : (F_2 u, v) = 0, \ \ \forall v \in N_1\},$$
$$K_3 = \{u \in K_2 : (F_3 u, v) = 0, \ \ \forall v \in N_2\} = \{u_0\}.$$

Легко проверить, что $K_1 = \psi + N_1$, множество K_2 состоит из элементов u вида: $u|_{\omega_1 \backslash \omega_2} = \psi$, $u|_{\omega}$ – решение задачи (5.115), u_0 – это элемент K_2 с минимальной нормой $|\cdot|_{1,2,\omega_1} + \alpha|\cdot|_{0,2,\omega_1}$.

Действительно, пусть u_1 другой элемент K_2, тогда, т.к. $u_0 - u_1 \in N_2$, то $(F_3 u_0, u_0 - u_1) = 0$, и, следовательно, $F_3(u_0, u_0) = F_3(u_0, u_1)$, и

$$\begin{aligned}
&(|u_0|_{1,2,\omega_1} + \alpha|u_0|_{0,2,\omega_1})^2 = F_3(u_0, u_1) \leqslant \\
&\leqslant (|u_0|_{1,2,\omega_1} + \alpha|u_0|_{0,2,\omega_1})(|u_1|_{1,2,\omega_1} + \alpha|u_1|_{0,2,\omega_1}).
\end{aligned}$$

Заключение предложения 5.19 следует теперь из теоремы 5.4. Предложение 5.19 доказано.

Предложение 5.20 ([26]). *Пусть в граничных условиях* (5.114) $S_1 = \partial\omega_3$, $S_2 = \partial\omega_2$. *Тогда*

1) *задача: найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $v \in H_0^1(\omega_1)$ *выполняется тождество*

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon) \int\limits_{\omega_1 \backslash \omega_2} (\nabla(u-\psi)\nabla v + (u-\psi)\, v) d\, x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_{\omega} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 u v - f v \right) d\, x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_{S_2} (\gamma u - \varphi) v d\, \sigma + \varepsilon^2 \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + \alpha u\, v) d\, x = 0, \\
&\varepsilon > 0, \alpha \geqslant 0,
\end{aligned}$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon \to +0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0;

2) $u|_{\omega_3} = \psi$;

3) *выполняются заключения* 3 – 5 *предложения* 5.19.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 5.19.

Построим теперь схемы МФО задачи дифракции из примера 5.1 дополнительные к схеме МФО примера 5.2.

Пример 5.6 ([26]). *В* $\omega = \omega_2 \backslash \overline{\omega}_4$ *рассмотрим уравнение* (5.113) *с* $a_0(x) \geqslant a > 0$ *при* $x \in \omega$ *и краевыми условиями*

$$u|_{S_1} = 0,\, [u]|_{S_2} = 0,\, \left[p(x)\frac{\partial u}{\partial N} \right] \Bigg|_{S_2} = 0,\, \frac{\partial u}{\partial N}\Bigg|_{S_3} = 0, \qquad (5.117)$$

где поверхности S_1, S_2, S_3 – *подмножества границ областей* ω_i $(i = 2, 3, 4)$, *будут введены ниже.*

Сформулируем несколько предложений, доказательства которых аналогичны доказательству предложения 5.19.

Предложение 5.21 ([26]). *Пусть в краевых условиях* (5.117) $S_1 = \partial\omega_2$, $S_2 = \partial\omega_3$, $S_3 = \partial\omega_4$, $p(x) = 1$ *при* $x \in \omega_3 \setminus \overline{\omega}_4$, $p(x) = 0$ *при* $x \in \omega_2 \setminus \overline{\omega}_3$.

Тогда

1) *задача: найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что выполняется тождество:*

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon) \int\limits_{\omega_1 \setminus \omega_2} (\nabla u \nabla v + \lambda u\, v) d\, x + \\
&+(1+\varepsilon) \int\limits_{\omega_3 \setminus \omega_4} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 uv - fv \right) d\, x + \\
&+\varepsilon \int\limits_{\omega_2 \setminus \omega_3} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_0 uv - fv \right) d\, x + \\
&+\varepsilon^2 \int\limits_{\omega_1} (\nabla u \nabla v + \alpha u\, v) d\, x = 0, \varepsilon > 0, \quad \lambda \geqslant 0, \alpha \geqslant 0
\end{aligned}$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon \to +0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0*;*

2) $u|_{\omega_1 \setminus \omega_2} = 0$*;*

3) $v = u_0|_{\omega_3 \setminus \omega_4}$ – *является в* $\Omega = \omega_3 \setminus \overline{\omega}_4$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевым условием* $\frac{\partial u}{\partial N}\big|_{\partial\Omega} = 0$*;*

4) $w = u_0|_{\omega_2 \setminus \omega_3}$ – *является в* $\omega_2 \setminus \overline{\omega}_3$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $w|_{\partial\omega_2} = 0$, $w|_{\partial\omega_3} = u_0$*;*

5) *выполняются заключения* 4, 5 *предложения* 5.19.

Предложение 5.22 ([26]). *Пусть в краевых условиях* (5.117) $S_1 = \partial\omega_4$, $S_2 = \partial\omega_3$, $S_3 = \partial\omega_2$, $p(x) = 1$ *при* $x \in \omega_2 \setminus \overline{\omega}_3$, $p(x) = 0$ *при* $x \in \omega_3 \setminus \overline{\omega}_4$.

Тогда

1) *задача: найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $H_0^1(\omega_1)$ *выполняется*

тождество:

$$
\begin{gathered}
(1+\varepsilon)\int\limits_{\omega_4}(\nabla u\nabla v+\lambda u\,v)d\,x+\\
+(1+\varepsilon)\int\limits_{\omega_2\setminus\omega_3}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_4}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon^2\int\limits_{\omega_1}(\nabla u\nabla v+\alpha u\,v)d\,x=0,\varepsilon>0,\quad\lambda>0,\alpha\geqslant 0
\end{gathered}
$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon\to+0$ u_ε сильно в $H_0^1(\omega_1)$ сходится к u_0;

2) $u|_{\omega_4}=0$;

3) $v=u_0|_{\omega_2\setminus\omega_3}$ *– является в $\Omega=\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$ обобщенным задачи (5.113) с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial N}\big|_{\partial\Omega}=0$;*

4) $w=u_0|_{\omega_3\setminus\omega_4}$ *– является в $\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$ обобщенным задачи (5.113) с краевыми условиями $w|_{\partial\omega_4}=0$, $w|_{\partial\omega_3}=u_0$;*

5) *выполняются заключения 4, 5 предложения 5.19.*

Предложение 5.23 ([26]). *Пусть в краевых условиях (5.117) $S_1=\partial\omega_2$, $S_2=\partial\omega_3$, $S_3=\partial\omega_4$, $p(x)=1$ при $x\in\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$, $p(x)=0$ при $x\in\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$.*

Тогда

1) *задача: найти $u=u_\varepsilon\in H_0^1(\omega_1)$ такой, что при всех $H_0^1(\omega_1)$ выполняется тождество:*

$$
\begin{gathered}
(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\int\limits_{\omega_1\setminus\omega_2}(\nabla u\nabla v+\lambda u\,v)d\,x+\\
+(\varepsilon+\varepsilon^2)\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_2}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon^2\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_4}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon^3\int\limits_{\omega_1}(\nabla u\nabla v+\alpha u\,v)d\,x=0,\varepsilon>0,\quad\lambda\geqslant 0,\alpha\geqslant 0
\end{gathered}
$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon\to+0$ u_ε сильно в $H_0^1(\omega_1)$ сходится к u_0;

2) $u|_{\omega_1\setminus\overline{\omega}_2}=0$;

3) $v = u_0|_{\omega_2\setminus\overline{\omega}_3}$ – *является в* $\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $v|_{\partial\omega_2} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial N}\big|_{\partial\omega_3} = 0$;

4) $w = u_0|_{\omega_3\setminus\overline{\omega}_4}$ – *является в* $\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $w|_{\partial\omega_3} = u_0$, $\frac{\partial w}{\partial N}\big|_{\partial\omega_4} = 0$;

5) *выполняются заключения* 4, 5 *предложения* 5.19.

Предложение 5.24 ([26]). *Пусть в краевых условиях* (5.117) $S_1 = \partial\omega_4$, $S_2 = \partial\omega_3$, $S_3 = \partial\omega_2$, $p(x) = 1$ *при* $x \in \omega_3\setminus\overline{\omega}_4$, $p(x) = 0$ *при* $x \in \omega_2\setminus\overline{\omega}_3$.

Тогда

1) *задача: найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $H_0^1(\omega_1)$ *выполняется тождество:*

$$(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\int\limits_{\omega_4}(\nabla u\nabla v + u\,v)d\,x +$$

$$+(\varepsilon+\varepsilon^2)\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_4}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + a_0uv - fv\right)d\,x +$$

$$+\varepsilon^2\int\limits_{\omega_2\setminus\omega_3}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + a_0uv - fv\right)d\,x +$$

$$+\varepsilon^3\int\limits_{\omega_1}(\nabla u\nabla v + \alpha u\,v)d\,x = 0, \varepsilon > 0, \quad \alpha \geqslant 0$$

имеет единственное решение и при $\varepsilon \to +0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0;

2) $u|_{\omega_4} = 0$;

3) $v = u_0|_{\omega_3\setminus\overline{\omega}_4}$ – *является в* $\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $v|_{\partial\omega_4} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial N}\big|_{\partial\omega_3} = 0$;

4) $w = u_0|_{\omega_2\setminus\overline{\omega}_3}$ – *является в* $\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $w|_{\partial\omega_3} = u_0$, $\frac{\partial w}{\partial N}\big|_{\partial\omega_2} = 0$;

5) *выполняются заключения* 4, 5 *предложения* 5.19.

Предложение 5.25 ([26]). *Пусть в краевых условиях* (5.117) $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \partial\omega_3$, $S_3 = \partial\omega_2\cup\partial\omega_4$, $p(x) = 1$ *при* $x \in \omega_2\setminus\overline{\omega}_3$, $p(x) = 0$ *при* $x \in \omega_3\setminus\overline{\omega}_4$.

Тогда

1) *задача: найти* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $H_0^1(\omega_1)$ *выполняется*

тождество:

$$
\begin{gathered}
(1+\varepsilon)\int\limits_{\omega_2\setminus\omega_3}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon\int\limits_{\omega_1\setminus\omega_2}(\nabla u\nabla v+\lambda u\,v)d\,x\\
+\varepsilon\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_4}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon^2\int\limits_{\omega_1}(\nabla u\nabla v+\alpha u\,v)d\,x=0,\varepsilon>0,\quad\alpha\geqslant 0,\quad\lambda\geqslant 0
\end{gathered}
$$

имеет единственное решение $u=u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon\to+0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0*;*

2) $v=u_0|_{\omega_2\setminus\overline{\omega}_3}$ *– является в* $\Omega=\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевым условием* $\frac{\partial v}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega}=0$*;*

3) $w=u_0|_{\omega_3\setminus\overline{\omega}_4}$ *– является в* $\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $w|_{\partial\omega_3}=u_0$, $\frac{\partial w}{\partial N}\Big|_{\partial\omega_4}=0$*;*

4) $z=u_0|_{\omega_1\setminus\overline{\omega}_2}$ *– элемент* $H^1(\omega_1\setminus\overline{\omega}_2)$ *с граничными значениями* $z|_{\partial\omega_1}=0$, $z|_{\partial\omega_2}=u_0$ *и минимальной нормой* $|\cdot|_{1,2,\omega_1\setminus\omega_2}+\lambda|\cdot|_{0,2,\omega_1\setminus\omega_2}$*;*

5) *выполняются заключения* 4, 5 *предложения* 5.19.

Предложение 5.26 ([26]). *Пусть в краевых условиях* (5.117) $S_1=\emptyset$, $S_2=\partial\omega_3$, $S_3=\partial\omega_2\cup\partial\omega_3$, $p(x)=1$ *при* $x\in\omega_3\setminus\overline{\omega}_4$, $p(x)=0$ *при* $x\in\omega_2\setminus\overline{\omega}_3$.

Тогда

1) *задача: найти* $u=u_\varepsilon\in H_0^1(\omega_1)$ *такой, что при всех* $H_0^1(\omega_1)$ *выполняется тождество:*

$$
\begin{gathered}
(1+\varepsilon)\int\limits_{\omega_3\setminus\omega_4}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon\int\limits_{\omega_4}(\nabla u\nabla v+\lambda u\,v)d\,x\\
+\varepsilon\int\limits_{\omega_2\setminus\omega_3}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+a_0uv-fv\right)d\,x+\\
+\varepsilon^2\int\limits_{\omega_1}(\nabla u\nabla v+\alpha u\,v)d\,x=0,\varepsilon>0,\quad\alpha\geqslant 0,\quad\lambda>0
\end{gathered}
$$

имеет единственное решение $u=u_\varepsilon$ *и при* $\varepsilon\to+0$ u_ε *сильно в* $H_0^1(\omega_1)$ *сходится к* u_0*;*

2) $v = u_0|_{\omega_3 \setminus \overline{\omega}_4}$ – *является в* $\Omega = \omega_3 \setminus \overline{\omega}_4$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевым условием* $\frac{\partial v}{\partial N}\big|_{\partial\Omega} = 0$*;*

3) $w = u_0|_{\omega_2 \setminus \overline{\omega}_3}$ – *является в* $\omega_2 \setminus \overline{\omega}_3$ *обобщенным задачи* (5.113) *с краевыми условиями* $w|_{\partial\omega_3} = u_0$, $\frac{\partial w}{\partial N}\big|_{\partial\omega_2} = 0$*;*

4) *выполняются заключения* 4, 5 *предложения* 5.19.

Замечание 5.17. *Схемы МФО из примера* 5.2 *являются частным случаем краевой задачи примера* 5.1*. Задачи из предложений* 5.21, 5.22 *можно также решать с использованием схем МФО примера* 5.2*. В этих предложениях приведены другие схемы МФО решения этой задачи. Схемы МФО из предложений* 5.23 – 5.26 *решать при помощи схем из примера* 5.2 *уже нельзя – это связано со структурой распределения первого и второго краевых условий на границах областей* ω_i *при* $i = 2, 3, 4$*.*

Замечание 5.18. *При построении схем МФО мы использовали однородное условие Дирихле на* $\partial\omega_1$*, т.е. строили их в пространстве* $H_0^1(\omega_1)$*. При выборе пространства* $H^1(\omega_1)$ *мы получим аналогичные схемы МФО рассмотренных задач, но с однородным условием Неймана на границе* ω_1*. Доказательства основных результатов о сходимости схем МФО в этом случае не отличаются от рассмотренных выше.*

Литература

[1] Альбер Я.И. О решении нелинейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве // Сиб. мат. журнал. 1975. Т. 16, №1. С. 3–11.

[2] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 415 с.

[3] Вишик М.И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму // Труды Моск. матем. общества. №12. 1963. С. 125 — 184.

[4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[5] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

[6] Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. О методе фиктивных областей для решения задач математической физики в областях сложной формы и его реализация. I // Вычисл. и прикл. матем. / Киев: Вища школа, 1983. №51. С. 23 – 34.

[7] Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. О методе фиктивных областей для решения задач математической физики в областях сложной формы и его реализация. II // Вычисл. и прикл. матем. / Киев: Вища школа, 1984. №52. С. 3 – 10.

[8] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные уравнения и опраторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

[9] Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решения вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.

[10] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численные исследования вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.

[11] Дубинский Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // УМН. 1968. Т. 138. Т. 23, №1. С. 45—90.

[12] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.

[13] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейныеураванения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 538 с.

[14] Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.

[15] Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: изд. ленингр. ун-та, 1985. 415 с.

[16] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.

[17] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

[18] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. Новое в зарубежной науке. Математика. №5. М.: Мир, 1977. 232 с.

[19] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.

[20] Скрыпник И.В. Разрешимость и свойства нелинейных эллиптических уравнений // Современные проблемы математики. Итоги науки и техники / М.: ВИНИТИ, 1976. №9. С. 131—254.

[21] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.

[22] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

[23] Трушин В.Б. Применение метода фиктивных областей в решении некоторого вариационного неравенства // Некоторые проблемы математики в задачах физики и механики. Междувед. сб. / М.: МФТИ, 1988 – С. 74-76.

[24] Трушин В.Б. О решении некоторых нелинейных уравнений и вариационных неравенств // ДАН АН СССР.1989. Т. 309, №2. С. 289—293.

[25] Трушин В.Б. Об одной общей схеме метода фиктивных областей // Проблемы современной математики в задачах физики и механики. Междувед. сб. / М.: МФТИ, 1989 – С. 114-121.

[26] Трушин В.Б. Об одной общей схеме метода фиктивных областей. Диссертация на соискание уч.ст. к. ф.-м.н., М.: 1992.

[27] Трушин В.Б. О разрешимости некоторых вариационных неравенств // Тезисы докладов Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ посвященной 90-летию академика С.М. Никольского, Москва, 17 апреля - 3 мая 1995 г. - М.: ПАИМС, 1995. – С 277-278.

[28] Трушин В.Б. О решении нелинейных уравнений с операторами мотонного типа // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики : сб. научн. трудов / МФТИ. – М., 2007 – С. 202-222.

[29] Трушин В.Б. Существование решений некоторых вариационных неравенств // Труды МФТИ.– 2011.–Том 3, є1 - С.139-140.

[30] Трушин В.Б. Один способ получения оценок скорости сходимости для некоторых аппроксимаций с монотонными операторами // Труды МФТИ.– 2012.–Том 4, є4 - С.195-198.

[31] Фонарев А.А. О некоторых нелинейных операторах // Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. научных трудов / Иркутск. 1980. С. 155 – 166.

[32] Brezis H. Equations et inequations non–linears dans les espaces véctoriels en dualite // Ann. Institut Fourier (Grenoble) 1968, V. 18.

[33] Brezis H., Grandall M., Pazy A. Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banac Space // Comm. Pure Appl. Math. 1970, V. 23, №4.

[34] Browder F.E. Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations // Bull. Math. Soc. 1978. V.74, №4. P. 651—656.

[35] Brauder F.E. The Degree of Mapping, and its generalisations // Contemporary Math. 1983, V. 21, P. 15 — 40.

[36] Calderon A.P.Lebegue spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Sympos. Pure Math. 1961, V. 4, Providence. P. 33 – 49.

[37] Minty G.J. Monotone (non–linear) operators in Hilbert spase // Duke Math. Journ. 1962. V.29,3. P. 341—346.